Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico–Químicas y Naturales de Granada

La Matemática como arte desde el prisma de los números complejos

Discurso leído en el acto de su recepción

como académico numerario por el

Ilmo. Sr. D.

Juan C. Martínez Moreno

Granada, 2013

Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico–Químicas y Naturales de Granada

La Matemática como arte desde el prisma de los números complejos

Discurso leído en el acto de su recepción

como académico numerario por el

Ilmo. Sr. D.

Juan C. Martínez Moreno

Granada, 2013

La Matemática como arte desde el prisma de los números complejos

“¿Quién de nosotros no desearía levantar el velo tras el que se oculta el futuro; lanzar una mirada a los próximos adelantos de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los siglos venideros? ¿Cuál será el objetivo hacia el que tenderá el espíritu de las generaciones futuras de matemáticos?. ¿Qué métodos, qué nuevos hechos revelará el nuevo siglo en el vasto y rico campo de pensamiento matemático?.”

— David Hilbert (1862-1943) matemático alemán.

La Matemática como arte desde el prisma de los números complejos

Juan C. Martínez Moreno

Sr. Rector Magnífico de la Universidad de Granada
Excmo. Sr. Presidente de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico–Químicas y Naturales
Ilmos. Sras. y Sres. Académicos
Sras. y Sres.

Ante todo, y al comienzo de la lectura de mi discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, deseo expresar mi agradecimiento a todos aquellos que han hecho posible mi elección como miembro de tan Ilustre Institución. Esta manifestación no es un hecho protocolario ni obligado, es simplemente algo que brota de una forma natural de mi interior y que me llena de satisfacción. Gratitud en particular, al Excelentísimo presidente de la Academia, Profesor González Caballero y al Ilustrísimo Profesor Cañada Villar por haberme instado y alentado a solicitar mi ingreso en la mencionada Institución. Además, mi amigo, el Profesor Cañada ha tenido

la generosidad de aceptar ser mi padrino y pronunciar el discurso de contestación; muchas gracias Antonio. Espero no defraudaros y desde este momento me pongo a disposición de la Academia para la realización de cuantas tareas que, como académico, me encomendéis. He venido a aprender, algo natural en mi comportamiento y por consiguiente no dudaré en consultar y recabar de la sapiencia de cada uno de vosotros. Sobre mis hombros recae una responsabilidad que, sinceramente, creo no tener méritos para
afrontar. Nunca imaginé que personalidades del mundo del saber me acogieran como uno más de ellos y en este momento la mejor forma de expresar mi sentimiento es acudir a la siguiente frase pronunciada por el miembro de esta Academia, el Profesor Bataner, en su discurso de entrada:

"Me reencuentro con muchos de vosotros, viejos amigos, sabios admirados, maestros de la ciencia y de la duda, pensadores. Siento vuestra afabilidad acogedora y vuestra mano amable que me tendéis diciendo: "Ven; entra" "

He de confesar que a lo largo de mis estudios de Licenciatura, y dada la educación que me dieron mis padres, mi interés en la Matemática residía en su aplicación. Pero a medida que avanzaba en los estudios comencé a comprender que, si deseaba llevar a cabo mi proyecto, necesitaba poseer una sólida formación en lo que se suele llamar Matemática pura. Ello, unido al curso de Análisis Funcional que tuve la suerte de recibir bajo el magisterio de mi querido Profesor Fuentes, fue la semilla que pronto brotó y despertaron en mí el amor a las matemáticas por sí mismas. En sus redes me encontré prisionero y definitivamente a través de la realización de mi Tesis Doctoral bajo la dirección de mi Maestro, el Profesor Rodríguez Palacios, aprendí a captar su belleza. Hoy en día no tengo la menor duda de que las matemáticas, con mayúsculas, constituyen un arte que desgraciadamente es minoritario. No es por casualidad que los grandes pilares del desarrollo que hoy disfrutamos provengan del empeño, por parte de una generación de matemáticos en hacer de la Matemática un arte. Generación que alcanzó su esplendor entre la segunda parte del siglo XIX y primera del XX. Esta visión de las matemáticas es la que he tratado de inculcar a mis alumnos a lo largo de los años, convencido de que el tratamiento que se debe hacer ante la presencia de un teorema matemático debe ser igual al que se hace cuando uno está, por ejemplo, ante la contemplación de un cuadro. Precisamente el objeto de mi discurso es el de tratar de introducir a ustedes en este arte, sin olvidar que una de las funciones más importantes de la Matemática es la de enseñar al hombre a ser libre.

1 Elementos de la Fundamentación de las Matemáticas

Deseo comenzar esta sección con una afirmación que en parecidos términos era realizada por Paul Richard Halmos (1916-2006) en 1958 y que hoy en día, después de haber pasado más de medio siglo, sigue manteniendo su vigencia. Es bien conocido que a partir de la segunda mitad del siglo XVII los avances de la Ciencia y Tecnología se han ido desarrollando a un ritmo cada vez más acelerado. Mucha gente tiene la sensación de que las matemáticas han jugado un gran papel en este progreso y, sin embargo, creen que éstas constituyen un cuerpo de verdades eternas, descubiertas por antiguos sabios y que físicos, economistas, ingenieros y científicos en general, utilizan en el desarrollo de su trabajo. He de decir que nada está más lejos de la realidad. La Matemática es un "ser" vivo y como tal crece, evoluciona y va perfeccionándose día a día; de su desarrollo dependen no solamente investigaciones básicas, más o menos teóricas, donde usualmente prima la belleza, sino también nuestro progreso en situaciones cotidianas de nuestros días.

Desde hace muchos años las matemáticas se han caracteriżado por presentar dos aspectos que se alimentan mutuamente. En un principio las matemáticas sirvieron para suministrar el lenguaje adecuado para explicar las leyes de la naturaleza. Galileo Galilei (1564-1642) afirmaba: "El gran libro de la naturaleza puede ser leído solamente por aquellos que conocen el lenguaje en el cual está escrito, y ese lenguaje es el de las matemáticas". Este aspecto de las matemáticas de servicio a otras ciencias o de dar respuesta a los desafíos tecnológicos del momento, es decir su utilidad, es lo que algunos propugnaron y propugnan ser las matemáticas que interesan y que, como René Descartes (1596-1650) afirmaba, hacen a los hombres dueños y dominadores de la naturaleza. Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855), conocido por el sobrenombre de "Principe de las matemáticas", tomó como suyo el siguiente lema: "Tú, Naturaleza, eres mi diosa. A tus leyes están sujetos mis servicios".

Existe otra vertiente de la Matemática conocida como la "demostración" que hunde sus raíces en los grandes clásicos: Euclides (325-265 a.C), Arquímedes (287-212 a.C) y Apolonio (su vida coincidió aproximadamente con el siglo I (ver [98])). La obra de Euclides titulada "*Los elementos*" (ver [92]), escrita unos trescientos años antes de Cristo, proporcionó al mundo matemático la noción de demostración matemática que abarca mas allá de la pura organización lógica de todo un cuerpo de conocimientos matemáticos.

Efim Zelmanov (1955-), Medalla Fields 1994, en su discurso de investidura como "Doctor Honoris Causa" por la Universidad de Oviedo (2008), decía: "la demostración es el alma de las matemáticas y es un concepto bien establecido que se ha mantenido en su esencia en los últimos dos mil años". Previamente al establecimiento de un resultado matemático existe toda una actividad creadora que consiste en formular una buena conjetura, para lo que se requiere inspiración y emplear, entre otros: imaginación, mucha intuición, curiosidad, experimentación, un conocimiento profundo y un duro y paciente trabajo. Por todo ello es por lo que la Matemática está muy cercana a las artes. El Profesor Zelmanov, en su discurso, añadía: “las matemáticas son un arte extraño, más elitista que la música o la escultura. Son también el arte mejor financiado, porque son inseparables de su utilidad”. Al emplear el adjetivo elitista, debemos pensar que Zelmanov se refiere a que podemos apreciar y disfrutar dichas artes, incluida la pintura, con algún conocimiento de la armonía y ritmo o de las formas, color y composición; mientras que para despertar esos mismos sentimientos en matemáticas, es imprescindible un conocimiento más profundo de la materia.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), considerado como el padre del análisis moderno, decía: “Un matemático que no es también algo de poeta nunca será un matemático completo”.

Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) afirmaba: “Las matemáticas poseen no solo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura”.

El Profesor Marcellán (1951-), en su discurso del acto de recepción en esta Academia, nos recordaba una famosa frase del matemático alemán Hermann Weyl (1885-1955), acerca de primar la belleza en el desarrollo del trabajo matemático. El campo de investigación de Weyl fue la Matemática y Física Teórica, y está considerado como uno de los matemáticos mas influyentes del siglo

XX. En este momento me gustaría resaltar otra de sus famosas citas recogida en su obra *Gesammelte Abhandlungen* [299, vol.IV]: "La pregunta sobre el fundamento y el significado definitivos de la Mate-mática sigue abierta; no sabemos en qué dirección encontrará su solución ni siquiera si se puede esperar una respuesta objetiva.
"Matematizar" podría perfectamente ser una actividad creativa del hombre, como la lengua o la música".

La actividad creadora y la actividad recreadora son esenciales para el desarrollo de la Matemática. El proceso creativo, no solamente es fundamental para resolver los problemas abiertos si no también para abordar éstos desde diferentes puntos de vista y promover nuevas metas. Gran parte de la actividad de los matemáticos consiste en buscar nuevas demostraciones de resultados viejos o conocidos. Como afirmaba Paul Richard Halmos (1916-2006), "una razón para ello es el puro placer; existe un goce estético, consistente en obtener un nuevo punto de vista de un paisaje familiar. Otra razón es que el creador original raramente alcanzó su objetivo por la ruta más breve, elegante, eficiente, y raramente llegó a apreciar las conexiones entre la creación de su mente y todos los otros campos de la Matemática. Las matemáticas han crecido tanto en los últimos dos mil años que necesitan ser continuamente pulidas, simplificadas, sistematizadas, unificadas y condensadas. De otro modo el problema de pasar la antorcha a cada nueva generación llegaría a ser casi completamente imposible". Por otra parte las ideas matemáticas no siempre nacen perfectas y mucho menos sus demostraciones. A título de ejemplo recordemos que, después de dos mil años de su aparición, las demostraciones geométricas de Euclides todavía contenían serias lagunas que fueron subsanadas por el gran matemático alemán David Hilbert (1862-1943), a comienzos del siglo XX.

La satisfacción y alegría, que la Matemática proporciona cuando se consigue el objetivo perseguido, son comparables a los que experimenta cualquier artista al contemplar su obra y por tanto proporcionan energías para perseverar en el trabajo.

La consideración de las matemáticas como arte estuvo siempre presente a lo largo del tiempo, si bien es verdad que, hasta mediados el siglo XIX, con carácter secundario. Por ejemplo es difícil ver la utilidad práctica de los retos que reseñamos a continuación, los cuales fueron afrontados por matemáticos durante muchos años. El trabajo lo hicieron persiguiendo fundamentalmente la estética y la belleza pero a su vez consiguieron dar un gran impulso a áreas de la Matemática tales como la geometría, el álgebra o la teoría de números. Los retos a los que nos referimos son los siguientes:

a) Probar el quinto postulado de Euclides (que aparece por primera vez en su obra anteriormente citada) el cual afirma que por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solo una paralela a dicha recta.

A lo largo de la Historia muchos matemáticos le dedicaron su atención, intentando demostrarlo sin conseguirlo.

b) La búsqueda de soluciones, por medio de radicales, de ecuaciones de grado superior a cuatro, siguiendo la línea que para resolver las ecuaciones de grado tres y cuatro aparece en la obra *Ars magna* (1545) de Girolamo Cardano (1501-1576).

Históricamente el primero en desarrollar una fórmula para ecuaciones de tercer grado fue Scipione del Ferro (1465-1526). Niccolò Fontana, más conocido por Tartaglia (1499-1557), obtuvo una fórmula general para resolver dichas ecuaciones. El descubridor de la fórmula para las de grado cuatro, así como la demostración de la fórmula de grado tres, fue Lodovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano. Aproximadamente tres siglos más tarde (1826), Niels Henrik Abel (1802-1829) probó que no hay ninguna fórmula para obtener los ceros de ecuaciones de grado mayor o igual a cinco en función de sus coeficientes (ver [1]). En la sección siguiente, ampliaremos esta información.

c) Los 356 años que los matemáticos emplearon en la prueba del "último teorema de Fermat" el cual afirma que: Si n es un entero mayor que dos, entonces no existen números naturales a, b y c tales que
$$a^n + b^n = c^n.$$

El teorema fue conjeturado por *Pierre de Fermat* (1601-1665) en 1637 (ver[292]). En junio de 1993 Andrew John Wiles (1953-) presentó la prueba de dicho teorema, [302], ante una conferencia internacional celebrada en el Departamento de Matemáticas Puras de la Universidad de Cambridge. Unos meses mas tarde se descubrió que en dicha prueba aparecían algunos errores los cuales pudo salvar Wiles con ayuda de Richard Taylor (1962-). La prueba quedó concluida en octubre del 1994 y en el número del mes de mayo de 1995 de la Revista Annals of Mathematics, se publicaron dos artículos, uno firmado por Wiles [301] y otro por Wiles y Taylor [277], de los que se sigue la prueba correcta (ver también [73]).

David Hilbert, en su famosa conferencia de 1900 dada en el Congreso Internacional de matemáticos en París, escribió a propósito de dicho teorema: "Los intentos por demostrarlo nos ofrecen un singular ejemplo del efecto inspirador que un problema tan especial puede ejercer sobre la disciplina". Hoy en día los resultados de Wiles han sido extendidos por él mismo y otros autores, trascendiendo su aplicación a la prueba de la conjetura de Fermat, y se consideran centrales en la Geometría Aritmética moderna (ver por ejemplo [177, 73]).

Aproximadamente en el primer tercio del siglo XIX comenzaron a aparecer las primeras discrepancias públicas acerca del fin primordial de las matemá- ticas. Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), siguiendo las ideas de Galileo, incluía en su obra Teoría Analítica del Calor (1822) la siguiente afirmación: "El estudio profundo de la Naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos. Este estudio ofrece no solamente la ventaja de una finalidad bien determinada, sino también la de excluir cuestiones vagas y cálculos inútiles. Es un medio de construir el análisis mismo y de descubrir las ideas que interesan más y que la ciencia ha de preservar siempre. Las ideas fundamentales son aquellas que representan fenómenos naturales".

En 1830, Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) respondía a Fourier mediante una carta enviada a Adrien-Marie Legendre (1752-1833), en los siguientes términos: “Es verdad que Fourier tiene la opinión de que el objeto principal de las matemáticas es el interés público y la explicación de fenómenos naturales, pero un científico como él debería reconocer que el objeto único de la ciencia es el honor del espíritu humano y con esta premisa una cuestión sobre la teoría de números vale tanto la pena como una cuestión acerca del sistema planetario”.

A lo largo del siglo XIX se vio la necesidad de presentar los conceptos y resultados matemáticos a través de un lenguaje abstracto en contraposición a como se había venido haciendo durante los siglos XVII y XVIII, donde los hechos matemáticos aparecían, más bien, como procesos empíricos que como deducciones lógicas obtenidas a partir de una axiomática apropiada, siguiendo el modelo propuesto en Los Elementos de Euclides. A finales del siglo XIX aparecen numerosos trabajos de gran nivel y rigor matemático. En aritmética destacan los trabajos de Georg Cantor (1845-1918) sobre sucesiones y Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), sobre cortaduras. Dichos trabajos aparecen en 1872 y están dedicados a dar una construcción de los números reales a partir de los racionales (ver [74, 246, 53]). Giuseppe Peano (1858-1932), en 1889 publica su *Memoria sobre unos nuevos métodos de la Aritmética* (Torino 1889) donde aparece la axiomática de los números naturales que ha llegado hasta nuestros días y que es conocida como los axiomas de Peano (ver [225]).

Por otra parte Hilbert convirtió las demostraciones de pura existencia en potentes herramientas que dieron lugar a la aparición de importantes resultados. Desarrolla la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert. En 1899 establece la definición axiomática de los números reales, la cual es hoy en día mayoritariamente utilizada para introducir dichos números.

Hilbert adoptó la teoría de conjuntos creada por Cantor en 1874, y su fervor por ella queda recogido en su sentencia: “Nadie puede expulsarnos del paraíso de los pensamientos de Cantor” (ver [132]). La mencionada teoría ha sobrevivido hasta nuestros dias, a pesar del rechazo, acorralamiento y dudas que tuvo en sus comienzos, y ha influido de una forma decisiva en el pensamiento y desarrollo científico del siglo XX. Uno de sus principales equivocados detractores fue Leopold Kronecker (1823-1891) el cual se empleó a fondo a desterrar y corregir, dentro de lo posible, toda idea cantoriana. Las diferencias científicas y filosóficas de Kronecker con Cantor degeneraron en una aversión personal, llegando a calificar a Cantor de “*renegado, charlatán y corruptor de la juventud*”.

Hilbert propició el cambio al sistema axiomático moderno. Sus éxitos contribuyeron a que las matemáticas se volvieran más abstractas dando lugar a la aparición de nuevas estructuras y por tanto imponiéndose cada vez mas la idea de que el estímulo creativo en matemáticas no solamente proviene del deseo conocer y dominar la Naturaleza. El proceso de abstracción surgió del interior de las propias matemáticas. A esta labor también contribuyó Paul Bernays (1888-1977), asistente y colaborador de Hilbert, el cual hizo importantes aportaciones a la teoría axiomática de conjuntos, a la lógica matemática y a la filosofía de las matemáticas. La colaboración de Bernays con Hilbert cristalizó en dos voluminosos trabajos publicados en 1934 y 1939 (ver [144, 145]). Una segunda edición revisada por Bernays fue publicada en los años 1968-1970 y una traducción, de ésta, al francés fue hecha en el 2001 (ver [112]). Los dos volúmenes constituyen una síntesis enciclopédica de la metamatemática realizada en las dos décadas precedentes a su publicación y son un especial hito en el desarrollo de la lógica matemática moderna (ver [259]).

La exposición matemática pasó a ser axiomática, entendiendo por ello que, si uno desea estudiar un fenómeno de la Naturaleza u objeto matemático lo primero que debe de hacer es elegir las propiedades relevantes de dicho fenómeno u objeto, y pasar después a formular dichas propiedades como axiomas. A continuación, mediante un proceso lógico, van apareciendo los resultados. Este método proporcionó un crecimiento y diversificación de la Matemática de tal magnitud que, en cierta ocasión, Albert Einstein (1879-1955) explicó las razones que le llevaron a dedicarse a la Física y no a la Matemática: en Física tenía todo el tema bajo control, mientras que una pequeña parcela de las matemáticas podía consumir su vida entera. La siguiente anécdota refuerza el hecho de que Einstein era un gran matemático.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII que inventó, entre otras muchas cosas, el sistema binario, base virtual de todas las arquitecturas de las computadoras actuales, afirmó acerca de la música: “La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando". Pues bien, Einstein era un violinista aficionado y en cierta ocasión se encontraba ensayando una sonata junto a su amigo el gran pianista Artur Schnabel (1882-1951). Einstein se perdía una y otra vez en un pasaje de la obra, lo que obligaba a su amigo a detenerse. En una de las interrupciones, Schanabel con gesto de frustración se dirigió a Einstein y le espetó: "Albert, ¿es que no sabes contar?".

Lo cierto es que la matemática axiomática adquirió un gran desarrollo a finales del Siglo XIX y comienzos del XX. Algunos pensaron o llegaron a creer que las matemáticas no eran otra cosa que el estudio de diversos axiomas los cuales serían utilizados, aplicando la lógica, para deducir conclusiones válidas. Esta corriente es lo que se conoce como logicismo (del que hablaremos más tarde) y tuvo su primer antecedente en Leibniz. Grandes matemáticos de la época expresaron su preocupación por este hecho. A título de ejemplo citaré al mencionado Hermann Weyl, discípulo de Hilbert y aspirante, en su tiempo, a ser un matemático tan universal como su maestro o el mismo Jules Henri Poincaré (1854-1912) el cual es descrito con frecuencia como el último "universalista" después de Gauss. Weyl hace un ordenamiento de lo que él considera como los componentes esenciales del conocimiento. El primero de ellos es la intuición (facultad de diferenciar e identificar el objeto del pensamiento), después le siguen: comprensión y expresión, pensamiento de lo posible y finalmente, en lo que concierne a la ciencia, la construcción de símbolos o aparatos de medir. El seguimiento, por parte de Weyl, de la escuela matemática intuicionista de Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), causó cierto malestar a su maestro “formalista”; si bien en la últimas décadas de su vida dio énfasis a la Matemática como “construcción simbólica”, acercándose a Hilbert y sobre todo al “simbolista” Ernst Cassier (1874-1945). En la filosofía intuicionista las entidades abstractas se admiten únicamente si son susceptibles de poder construirse por la mente. Los intuicionistas tienen en común el rechazo a la teoría de conjuntos de Cantor y solamente los objetos y conceptos matemáticos que puedan construirse en un número finito de pasos, a partir de los números naturales, son aceptados. Históricamente se considera a Leopold Kronecker como el primer intuicionista o constructivista.

¿Qué es lo que estaba pasando para que uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX, como es el caso de Weyl, se uniera a la crítica de la formalización de las matemáticas que amenazaba con derribar, no solo los avances recientes, sino también las partes más clásicas de éstas?. La consagración oficial de la Teoría de Conjuntos había llegado en el Primer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Zurich en 1897, en el que Jacques Salomón Hadamard (1865-1963) y Adolf Hurwitz (1859-1919) pusieron de manifiesto sus importantes aplicaciones al Análisis Matemático. Sin embargo ese mismo año aparecieron los primeros conjuntos “paradójicos”. Cesare Burali-Forti (1861-1931) hizo ver que el hecho de suponer la existencia de un conjunto formado por todos lo números ordinales contradice los axiomas de la teoría de conjuntos (hemos de decir que esta paradoja era ya conocida por Cantor y se lo había hecho saber a Hilbert, en 1896, por medio de una carta no publicada). En 1899,el propio Cantor, envía una carta a Dedekind donde le comunica que no puede decirse que los ordinales formen un conjunto ni hablar del "conjunto de todos los conjuntos" sin llegar a una contradicción. En 1903, Bertrand Russell (1872-1970), en el apéndice de su trabajo *The Principles of Mathematics* (Principios de las Matemáticas) (ver [249]), probó que la noción del "conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos", es también contradictorio. Tal conjunto, de existir, sería elemento de sí mismo si, y solo si no es elemento de sí mismo: A es un miembro de A si, y solo si A no es un miembro de A. Esto es lo que se conoce como Paradoja de Russell. Una versión de dicha paradoja, conocida popularmente como *Paradoja del barbero*, reza como sigue: *En un pueblo hay un único barbero que solo puede afeitar a los hombres que no se pueden afeitar por sí mismos, y solo a ellos. ¿Quién afeita al barbero?. La respuesta es bien sencilla, un tal barbero no puede existir.* (Si se afeita, entonces puede afeitarse por sí mismo, por lo tanto no debería afeitarlo el barbero de su pueblo que es él. Por el contrario, si no se afeita, entonces algún barbero debe de afeitarlo, pero él es el único barbero de su pueblo). Para evitar esta paradoja, Russell desarrolló la primera *Teoría de Tipos* que previamente había aparecido de una forma primaria en una obra conjunta con Alfred North Whitehead (1861-1947) titulada: *Principia Mathematica*, publicada en tres tomos entre 1910 y 1913. La Teoría de Tipos busca clasificar los conceptos según el tipo. Por ejemplo los números, como elementos básicos en matemáticas, son de primer tipo. Sin embargo los enunciados relativos a números son de tipo dos, etc. En los Principios de la Matemática, Russell acepta enunciados de tipo n únicamente relacionados con cosas de tipo estrictamente menor que n. Con ello paradojas como las anteriormente mencionadas no se pueden dar aquí ya que se estaría afirmando algo sobre elementos del mismo nivel. De dicha teoría se encontraron más tarde aplicaciones a las ciencias de la computación y la tecnología de la información.

El problema radicaba, ¡cómo no!, en formular una axiomatización adecuada para la teoría de conjuntos. El primero en intentarlo fue Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), padre de la lógica matemática. En 1879, con la publicación de su obra " Begriffsschift" (Conceptografía), inició una nueva era en esta disciplina que apenas había sido modificada desde Aristóteles (384 a.C-322 a.C). Ideó un sistema más preciso que el de Cantor pero, para su desgracia, la Paradoja de Russell vino a arruinar en parte su sistema ya que este no eliminaba dicha paradoja. Russell fue un gran defensor del logicismo (teoría que pretendía reducir las matemáticas a un capítulo de la lógica), llegando a decir que: "la meta del logicismo es mostrar que todas las matemáticas puras se siguen de premisas puramente lógicas y que estas usan solamente conceptos definibles en términos lógicos". Russell y Whitehead recogieron la iniciativa de Frege, y el objetivo prioritario de sus investigaciones matemáticas era probar que los matemáticos no necesitan ninguna hipótesis de inspiración empírica para construir sus entes matemáticos. Su obra Principia Mathematica tiene como objeto central de estudio, la teoría formal de los conjuntos; sin embargo ésta no llegó a completarse. Ellos demostraron que todas las matemáticas clásicas podían derivarse de la teoría de conjuntos y por consiguiente de los axiomas de los Principia. Quedando pendiente si dicha axiomática pertenece a la lógica. La filosofía del logicismo se basa en la escuela filosófica conocida como realismo, el cual permite aceptar entidades abstractas en matemáticas más allá de las que la mente humana pueda construir. Russell fue un realista en este sentido e hizo revolucionarias contribuciones a los Fundamentos de la Matemática.

La axiomática de los Principia quedó relegada por la aparición de una axiomática mucho más manejable que a continuación vamos a comentar y que es conocida como la axiomática de Zermelo-Fraenkel. En esta axiomática se puede demostrar que al menos dos de sus axiomas, el axioma de elección y el axioma del infinito, no pueden considerarse como proposiciones lógicas (ver [266]).

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), en 1905 inició un trabajo que culminó en 1908 con una axiomática que no permitía la Paradoja de Russell. Este trabajo fue perfeccionado en 1922, de forma independiente, por Adolf Abrahm Halevi Fraenkel (1891-1965) (ver [99]) y Thoralf Albert Skolem (1887-1963) (ver [263]); dando lugar a una teoría axiomática con nueve axiomas (incluyendo el Axioma de elección), conocida con el nombre de axiomas de Zermelo-Fraenkel (escribiremos ZFC) (ver[65]) (si la historia hiciese justicia deberían de llamarse axiomas de Zermelo-Fraenkel-Skolem).

La teoría de conjuntos formulada por Zermelo, Fraenkel y Skolem, no solamente eliminaba la paradoja de Russell, sino también todas las demás que surgieron con las axiomáticas de Cantor y Frege. Además permitía la construcción de todos los conjuntos que se utilizan usualmente en la práctica de las matemáticas, pero no excluía, explícitamente, la posibilidad de conjuntos que pertenecieran a sí mismo. John von Neumann (1903-1957), uno de los grandes matemáticos del siglo XX y asistente de Hilbert, en su tesis doctoral, leída en 1925 (dirigida por Leopold Fejér (1880-1959)), demostró que dicha posibilidad podía ser excluida bien utilizando la noción de "clase" o bien el "axioma de fundación". Con esta contribución de von Neumann, la axiomática de la teoría de conjuntos llegó a ser "completamente satisfactoria", y es la que venimos empleando los matemáticos desde la década de 1920;

quedando pendiente la pregunta de que si era definitiva o podia ser mejorada. En el Congreso de Konigsberg de 1930 Kurt Friedrich Gödel (1906-1978) anunció su famoso "Primer teorema de incomplitud" (ver [124, 94, 38, 128, 208, 65]), el cual viene a afirmar que: *cualquier sistema axiomático de las matemáticas lo suficientemente potente como para permitir demostrar afirmaciones aritméticas verdaderas que envuelvan a los números naturales (esto es, un sistema que englobe a la aritmética de Peano, como es el caso de ZFC) es incompleto en el sentido de que, se puede establecer una afirmación la cual ni se puede demostrar ni se puede refutar dentro de ese sistema.* Con ello daba una respuesta negativa a la anterior cuestión. El Teorema de Gödel no era, en realidad, algo absolutamente nuevo, pues había habido anteriores sugerencias de que probablemente era verdadero algo similar; pero los expertos continúan sorprendidos de que, con los conocimientos de la época, se pudiese obtener una demostración y todos coinciden en que es una de las conquistas más altas de la humanidad. John von Neumann, participante en dicho congreso, comunicó a Gödel la siguiente consecuencia de su teorema: *los sistemas axiomáticos usuales (por ejemplo la aritmética de Peano o la axiomática de ZFC) son incapaces de probar su propia consistencia (en el caso de que fuesen consistentes)*. Gödel consideró esta consecuencia como una simple curiosidad y podría haberla obtenido él independientemente. Es por ello por lo que dicho resultado se conoce con el nombre de "Segundo teorema de incomplitud de Gödel" (ver [94, 39, 128, 65]).

Los teoremas de incomplitud de Gödel, cumbres de la lógica matemática, dieron al traste con el Programa Formalista de Hilbert, iniciado en los años veinte y en el que, bajo la influencia de él, participaron matemáticos de gran talla, a pesar de su juventud, tales como Wilhelm Ackermann (1896-1962), Bernays, Gerhard Gentzen (1909-1945), Jacques Herbrand (1908-1931) o von Neumann. El mencionado programa lo podemos resumir de la forma siguiente:

Todas las ramas de la matemáticas se podrían llegar a formalizar en un sistema ***completo***: *sistema en el que a partir de la axiomática establecida, toda afirmación verdadera debe ser demostrable*, ***consistente*** o no contradictorio: *es imposible demostrar, dentro de dicho sistema, que una afirmación es verdadera y también probar que es verdadera su contraria* y ***decidible***: *la verdad o falsedad de una afirmación sería demostrable mediante un "procedimiento universal" casi mecánico en un número finito de operaciones.*

Con este lenguaje el Primer teorema de incomplitud de

Gödel nos dice que un sistema axiomático de las matemáticas que englobe a la aritmética de Peano, o bien es inconsistente, y en tal caso existirá alguna afirmación de modo que tanto ella como su contraria se podrán demostrar, o bien es incompleto y, si este es el caso, existirán afirmaciones verdaderas no demostrables, en el sistema, y por tanto irrefutables. En particular, si ZFC es consistente, ningún axioma adicional al mismo puede probar o refutar toda afirmación en el sistema resultante. Hasta ahora no hay nada que indique que ZFC sea inconsistente pero el Teorema de incomplitud impide probarlo. En consecuencia, la consistencia de ZFC es un artículo de fe y todos los resultados que se obtienen a partir de ZFC son "*relativamente consistentes*" (son ciertos si se acepta la consistencia de ZFC). De lo que sí estamos seguros es que ZFC no puede completarse, por más axiomas que le añadamos, y por consiguiente siempre existirá una fórmula ϕ tal que ni ϕ ni la negación de ϕ pueden demostrarse.

Los teoremas de Gödel acabaron, por una parte con la esperanza de Hilbert de obtener una demostración de la consistencia de la teoría de los números naturales (hemos de recordar que los participantes en el programa de Hilbert habían conseguido probar la consistencia de un sistema de aritmética de los números naturales que permitía la suma pero no el producto), y por otra con el empeño de los seguidores del logicismo de que la Matemática se reducía a una argumentación lógica. No obstante el logicismo ha sido de gran importancia para el desarrollo de la lógica matemática moderna. Por ejemplo, fue a través del logicismo cuando se comenzó a hacer lógica matemática en forma seria. Los dos cuantificadores de uso diario (el universal, $\forall$, y el existencial, $\exists$) fueron introducidos en la lógica por Frege; y la influencia de los *Principia de Russell* en la lógica matemática, ya es parte de la historia de su desarrollo. La solución al problema de conocer cuándo un sistema es o no decidible era ya considerado por Leibniz como uno de sus grandes proyectos.

Se pueden encontrar sistemas decidibles siempre que estos tengan un número pequeño de axiomas y signos primitivos (ver [178]). Alan Mathison Turing (1912-1954), uno de los padres de la Ciencia de la Computación y precursor de la informática moderna, en su decisivo artículo, publicado en 1936 (ver [281]), titulado "*Los números computables, con una aplicación al Entscheidungsproblem* (problema de decisión: encontrar un método de decisión para resolver todos los problemas formulados en el lenguaje universal)" abordó el problema planteado por Hilbert acerca de si las matemáticas son decidibles, es decir, si existe un método bien definido que pueda aplicarse a cualquier afirmación matemática y que nos diga si esa afirmación es cierta o no. Cambió la técnica, conocida como numeración de Gödel, empleada por éste en su trabajo sobre el Teorema de incompletitud; por lo que hoy se conoce como Máquina de Turing: unos dispositivos formales y simples que pueden ser considerados como un modelo formal de computador (ver [282]). Demostró que dicha "máquina" era capaz de probar que no había ninguna solución para el problema de decisión. Aunque su demostración se publicó poco después de una prueba equivalente dada por Alonzo Church (1903-1995), la cual estaba basada en un sistema formal conocido como el Cálculo lambda (ver [62, 21, 22], ver también [174, 175, 176]), el estudio de Turing es mucho más accesible e intuitivo.

Por todos es conocido que la Informática es uno de los pilares sobre el que se sostiene nuestra actual civilización.

Volviendo a la axiomática de ZFC, hemos de decir que algunos matemáticos trataron de probar que el Axioma de elección se podia deducir de los restantes axiomas, vano intento ya que del trabajo de Gödel, publicado en 1939, (ver [128, 127, 95] y MR0002514 (2,66c)) y de los importantes artículos de Paul Joseph Cohen (1934-2007), (medalla Fields 1966), publicados en los años 1963 y 1964, (ver [64], MR0157890 (28,1118) y MR0159754 (28,2962)) se deduce que la *Hipótesis del Continuo* no puede ser establecida a partir de la axiomática de Zermelo-Fraenkel, ni el Axioma de elección se puede obtener a partir de los restantes axiomas de dicha axiomática, es decir, ambos axiomas son independientes del resto y por tanto no se pueden demostrar o refutar a partir de los restantes (ver [65]). Respecto a la independencia de los restantes axiomas de la axiomática de ZFC hemos de decir que el axioma de pares puede obtenerse a partir de los axiomas de reemplazo y del conjunto potencia. Por su parte el axioma del conjunto vacío puede obtenerse a partir del axioma de reemplazamiento y del axioma del infinito (ver [182]). También se conoce que a partir de un número finito de axiomas de la axiomática de ZFC no se pueden obtener todos los axiomas de dicha axiomática (ver [65]). Estas afirmaciones carecen de relevancia si la axiomática de ZFC resultase ser inconsistente.

Queremos hacer hincapié en el hecho de que existen dos excepciones notables en la axiomática de ZFC, la primera de ellas es el Axioma del infinito que postula la existencia de un conjunto infinito o, lo que es equivalente, la existencia de los números naturales y por tanto es la esencia de la teoría de conjuntos. Como consecuencia del Segundo Teorema de Gödel, no es posible demostrar que el axioma del infinito es consistente respecto al resto de los axiomas de ZFC y por tanto la aceptación de la existencia de los números naturales se convierte en un acto de fe. La segunda es el Axioma de elección que es el más importante desde el punto de vista histórico, y a diferencia de los demás es especialmente no constructivo. En su forma tradicional reza como sigue: *Sea A un conjunto de conjuntos no vacíos y disjuntos, entonces se puede tomar un solo elemento de cada conjunto de A.*

Con objeto de dar una definición más formal recordemos que, una *función de elección* es una función f definida en un conjunto A de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, tal que para todo conjunto B perteneciente a A, entonces $f(B)$ pertenece a B. El Axioma de elección lo podemos enunciar ahora como: *Todo conjunto de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, posee una función de elección.* Por consiguiente el Axioma de elección postula la existencia de funciones de elección sin proporcionar ninguna descripción concreta de tales funciones a menos que el conjunto A sea finito, en cuyo caso es fácil de obtener explícitamente una función de elección a partir de los otros axiomas de la teoría de conjuntos y del principio de inducción. Zermelo introdujo el Axioma de elección al objeto de probar el *Teorema de buena ordenación* el cual afirma que: *dado un conjunto arbitrario, entonces es posible establecer un orden sobre él de modo que toda parte no vacía del mismo admite un primer elemento*. De hecho, ambos enunciados son equivalentes y debido a que parece imposible definir un buen orden en el conjunto de los números reales, entre otros, el Axioma de elección tuvo cierta oposición entre algunos matemáticos a comienzos el siglo XX. Por otra parte, como hemos resaltado anteriormente, el Axioma de elección es independiente del resto de axiomas de ZFC y por consiguiente, desde el punto de vista formalista, no hay diferencia entre aceptarlo o no. Ello da lugar a que en la teoría de conjuntos nos encontremos en una situación muy similar la que ocurre con la Geometría Euclídea o no Euclídea, según se acepte o no el quinto postulado de Euclides.

El Axioma de elección ha sido prácticamente indispensable en el desarrollo de las matemáticas, siendo utilizado para obtener importantes resultados en casi todas las ramas de las mismas, sin que aparezcan contradicciones. A título de ejemplo citamos las siguientes proposiciones, las cuales son de uso común y casi diario:

Proposiciones equivalentes:

- El ya citado Teorema de buena ordenación, conocido también como *Axioma de Zermelo*.

- *El Lema de Zorn*, el cual afirma que todo conjunto no vacío parcialmente ordenado en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene cota superior, tiene al menos un elemento maximal.

- El producto cartesiano de cualquier familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.

- Si A es un conjunto infinito, entonces el producto cartesiano de A consigo mismo tiene la misma cardinalidad que A.

- Todo espacio vectorial tiene una base.

- El producto de espacios topológicos compactos es compacto (*Teorema de Tychonoff*).

- Toda cadena en un conjunto ordenado está contenida en una cadena maximal (*Lema de Kuratowski*).

Proposiciones no equivalentes:

- La unión numerable de conjuntos numerables es también numerable.

- Dado un conjunto infinito A, existe una función inyectiva del conjunto de los números naturales en A.

- Todo cuerpo tiene una clausura algebraica.

- Todo subgrupo de un grupo libre es libre (Teorema de Nielsen-Schreier).

- *El Teorema de Hahn-Banach* en Análisis Funcional.

- Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal.

- El Teorema de categoría de Baire en espacios métricos completos.

- En todo espacio vectorial topológico de dimensión infinita existe un funcional lineal discontinuo.

- Un espacio uniforme (en particular métrico) es compacto si, y solo si es completo y totalmente acotado.

- Todo espacio de Tychonoff tiene una compactificación de Stone-Cech.

- Dos cardinales arbitrarios siempre son comparables.

(ver [244, 245, 278, 279, 221, 83]). En consecuencia la inmensa mayoría de los matemáticos están a favor de la consideración de dicho axioma. No obstante algunas objeciones son "comprensibles" en vista de las consecuencias que acarrea su consideración, tal es el caso de la *Paradoja de Banach-Tarski.* En su forma más popular dicha paradoja afirma: " Es posible cortar un guisante en un número finito de piezas las cuales pueden ser recombinadas para formar una bola del tamaño del Sol". Aunque no lo parezca, la mencionada paradoja es un teorema matemático establecido por Stefand Banach (1892-1945) y Alfred Tarski (1902-1983) en 1924 (ver [20]) que enunciamos en la siguiente forma: *La bola unidad B del espacio euclídeo tridimensional se puede dividir en $m+n$ partes disjuntas ($m+n$ mayor que 3), de modo que las m primeras se pueden combinar (utilizando únicamente isometrías del espacio) para formar una bola unidad B, y las otras n se pueden ma-*

nipular de la misma manera para formar otra bola unidad B (ver [20, 294, 276, 222]).

Este Teorema prueba que el Problema de la medida no tiene solución en espacios euclídeos de dimension mayor o igual a tres (ver [33, 279]), y las ideas que surgen de la demostración son la base de la teoría de medidas finitamente aditivas. Una teoría que implica muchas interacciones entre Análisis (teoría de la medida y funcionales lineales), Álgebra (combinatoria y teoría de grupos), Geometría (grupos e isometrías) y Topología (grupos topológicos localmente compactos) (el lector interesado puede recurrir a las bases de datos usuales para ampliar esta escueta información). En consecuencia el apelativo de Paradoja que acompaña al mencionado teorema no es adecuado matemáticamente hablando, aunque sí lo es si atendemos a nuestra intuición, y pone de manifiesto la diferencia que existe entre el espacio en el que nos movemos y el espacio euclídeo tridimensional. Si pensamos en una esfera de madera de radio uno y la queremos trocear para, a partir de los trozos, obtener otras dos esferas de radio uno, nos resultará imposible ya que, entre otros, nos estaríamos saltando a la torera el Principio de la conservación de la materia. No podemos decir que el volumen de la esfera se duplica. La forma de entenderlo es acudir al concepto de volumen que se tiene en matemáticas, a partir de la teoría de la medida, y asumir que las particiones que se consiguen, en el Teorema de Banach-Tarski, no se pueden medir. Es aquí donde juega su papel el Axioma de elección. Debemos reseñar que si se suprime el axioma de elección en ZFC, entonces, en el modelo resultante, no puede probarse el susodicho teorema (ver [267, 268]).

Pasamos ahora a dar una breve información acerca de la *Hipótesis del Continuo* (en forma abreviada HC) introducida por Cantor en 1878.

Cantor extendió a conjuntos infinitos la noción de número de elementos de un conjunto finito, introduciendo el concepto de cardinal. Dos conjuntos X e Y tienen el mismo cardinal (card$(X) =$ card(Y)) si existe una aplicación biyectiva entre ellos y el cardinal de X será menor que el de Y (card$(X) <$ card(Y)) si existe una aplicación inyectiva de X en Y, pero no existe una sobreyectiva. En 1873 probó que el cardinal de los números naturales es estrictamente menor que el cardinal de la recta real (conocida también como el continuo). De una manera informal HC viene a decir:

“No existen subconjuntos infinitos de la recta real cuyo cardinal esté estrictamente comprendido entre el cardinal de los naturales y el de dicha recta”.

De una forma matemática más formal la podemos enunciar:

Para todo subconjunto infinito A de $\mathbb{R}$, o bien card$(A) =$ *card*$(\mathbb{N})$ *o bien card*$(A) =$ *card*$(\mathbb{R})$.

Para más información ver por ejemplo [65, 70, 260].

Como ya hemos comentado anteriormente, HC es un indecidible en la axiomática ZFC, es decir ni es falsa (probado por Gödel) ni es verdadera (probado por Cohen). Por consiguiente es independiente de la axiomática de ZFC y se puede desarrollar una teoría matemática aceptando HC o no aceptándola. Afortunadamente HC no es de uso diario obligado para los matemáticos y gran parte de los que trabajan en Teoría de conjuntos piensan que es falsa. No obstante, a partir del último cuarto del siglo XX, se ha observado que la aceptación, o no, de HC lleva a la solución de diversos problemas en el área de las matemáticas. A título de ejemplo (interesado de mi parte) expondré a continuación uno de estos problemas conocido como *La conjetura de Kaplansky*.

Recordemos que dados un espacio vectorial, real o complejo, X y dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sobre X bajo las cuales X es un espacio normado, se dice que $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$, si existen dos constantes positivas α y β tal que $\|\cdot\|_1 \leq \alpha\|\cdot\|_2 \leq \beta\|\cdot\|_1$. En 1941 (ver [117, Satz 17]) Izráil Moiséyvich Gélfand (1913-2009) probó que toda norma que dote de estructura de álgebra de Banach (ver apartado C*-álgebras para las definiciones) al álgebra, C(Ω), de todas las funciones continuas complejo valuadas sobre un espacio compacto Hausdorff Ω, es equivalente a la norma natural de C(Ω), la cual es la norma del supremo y la notaremos por $\|\cdot\|_\Omega$. Este resultado era reencontrado por Irving Kaplansky (1917-2006) en 1948-9 (ver [160]) (ver tambien [261, pag 30], [236], [237] y [262, pag 58]). El mencionado autor probó que si $\|\cdot\|$ es cualquier otra norma (no necesariamente completa) bajo la cual $C(\Omega)$ es un álgebra normada, entonces $\|\cdot\|$ es mayor o igual a $\|\cdot\|_\Omega$. De una forma natural, surge la pregunta sobre cuándo una norma sobre C(Ω) la cual dota a este espacio de estructura de álgebra normada no completa (a una tal norma la denominaremos simplemente como una *norma de álgebra* sobre $C(\Omega)$) es equivalente a $\|\cdot\|_\Omega$. A esta pregunta se le conoce como *La conjetura de Kaplansky*, ya que dicho autor la planteaba explícitamente en 1948. Una respuesta afirmativa a esta cuestión, es decir, si toda norma de algebra sobre $C(\Omega)$ es equivalente a la norma del supremo, nos permitiría establecer el siguiente bello resultado:

La estructura topológica de $C(\Omega)$, como álgebra normada, queda completamente determinada por su estructura algebráica.

Esto es precisamente lo que puede afirmarse en el caso de que la norma sea completa, gracias al Teorema de Gélfand-Šilov-Kaplansky-Rickart, al que nos hemos referido anteriormente.

En 1976, Harold Garth Dales (1944-) y Jean Esterle (1947-), probaron de forma independiente que, asumiendo la Hipótesis del Continuo, para cada espacio compacto Hausdorff infinito-dimensional Ω, existe una norma de álgebra sobre $C(\Omega)$ que no es equivalente a la norma del supremo (ver [70, 68, 90, 69]).

En un principio se pensó que la consideración de la Hipótesis del Continuo en el resultado anterior podría no ser esencial ya que, el propio Dales manifiesta en su artículo que no conoce hasta qué punto dicha hipótesis, o cualquier axioma más débil, es necesaria para obtener su resultado. Sin embargo, a finales de 1976, Robert Solovay (1938-) comunicaba a Dales y a Willian Hugh Woodin (1955-) (doctorando de Solovay) que había probado que, si se admite la existencia de un modelo de teoría de conjuntos (por ejemplo la axiomática de ZFC) entonces existe un modelo de teoría de conjuntos en el cual toda norma de álgebra sobre $C(\Omega)$

es equivalente a la norma del supremo. En este modelo se consideraba el axioma de elección y un resultado de Woodin pero, naturalmente, la Hipótesis del Continuo es falsa. El trabajo de Solovay no fue publicado pero poco tiempo después fue mejorado por Woodin en su tesis doctoral. Concretamente éste probó que, si a la axiomática de ZFC se le añade el Axioma de Martin, entonces la conjetura de Kaplansky tiene respuesta afirmativa. En lenguaje de teoría de conjuntos, se dice que la conjetura de Kaplansky es relativamente consistente con la axiomática de ZFC añadiendo el Axioma de Martin (ver [304, 71]). Estos hechos revelan que la mencionada conjetura es independiente de la teoría de conjuntos de ZFC, es decir ni dicha conjetura ni su negación pueden deducirse de ZFC.

En un reciente brillante artículo, [91], Esterle presenta el estado de la cuestión acerca de la teoría desarrollada en torno a la conjetura de Kaplansky.

Hemos dado un breve paseo por diversas corrientes, acerca de los Fundamentos de la Matemática, que han ido surgiendo a lo largo de la Historia del pensamiento del hombre con el objeto de que el lector adquiera una parca, pero suficiente, noción del “terreno” que pisamos, y como nos movemos en él, los matemáticos. Una concepción madura de lo que hoy se conoce como “matemática moderna” y “útil”, lleva aparejado la aceptación de la axiomática ZFC, con la aportación de von Neumann, y comprender que lo que conocemos como conjuntos son esencialmente una estructura algebraica mucho más compleja y rica que, por ejemplo, tienen los anillos, los cuerpos o los espacios vectoriales.

Un matemático actual no debe aferrarse a concepciones matemáticas tales como:

El *platonismo* que, como hemos comentado anteriormente, inició su declive en el primer tercio del siglo XIX y hunde sus raíces en los filósofos-matemáticos griegos tales como Platón (427 ó 428 a 347 a.C.). Afirma que los objetos matemáticos y conceptos tratados por las matemáticas no son simples invenciones que anidan en la mente de los matemáticos, sino que son realidades preexistentes y lo único que hace el matemático es percibirlas y describirlas (ver [125]).

El *formalismo de Hilbert* que consiste en formalizar las matemáticas dentro de un sistema cuyos objetos, teoremas y demostraciones se expresen, mediante el lenguaje de la lógica simbólica, como proposiciones que tienen su estructura lógica pero carecen de contenido.

El *intuicionismo* de Brouwer o el *logicismo* de Frege, comentados anteriormente.

En palabras de Ernst Snapper (1913-2011): "*La llave de entrada a los fundamentos de las matemáticas yace oculta en algún lugar de las raíces filosóficas del logicismo, el intuicionismo y el formalismo*", pero hasta hoy, que yo modestamente conozca, no ha sido encontrada. Debemos aceptar la consistencia relativa del modelo ZFC, recordar que hasta ahora no hay nada que indique que dicho modelo sea inconsistente y por consiguiente debemos considerarlo incompleto y en consecuencia existirán afirmaciones verdaderas no demostrables, en el sistema, y por tanto irrefutables.

No hay que tener ningún miedo o reparo a la matemática moderna que ha dado grandes frutos, dejarla que fluya libremente teniendo siempre presente el siguiente epígrafe debido a D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948), conocido como "El primer biomatemático":

La perfección de la belleza matemática es tal que lo que es bello y regular resulta también ser lo más útil y excelente

Después de este parco recorrido por los Fundamentos de la Matemática, que creemos necesario para cumplir con el objetivo de este discurso, nos proponemos situarnos más cerca del contenido que anuncia el título del mismo, comenzando con una breve introducción y génesis de los números complejos.

2 Los Números Complejos y los Cuaternios

Comenzaré presentando el siguiente ejemplo de la relación entre lo que comúnmente conocemos como Matemática pura y el desarrollo de la tecnología. Este es un ejemplo que Von Neumann citaba con mucha frecuencia con una intención bien clara, como podrá comprobar el lector, y que yo subcribo.

Hace aproximadamente doscientos años, uno de los problemas más importantes de la ciencia aplicada, del cual dependía el desarrollo de la industria y el comercio, era salvar vidas en el mar. Las cifras de pérdidas de vidas humanas y económicas eran astronómicas. Los gobiernos dedicaban un gran esfuerzo y dinero, a veces absurdamente, en resolver dicho problema desde un punto de vista puramente técnico, equipando a los barcos con todo tipo de artilugios. Mientras tanto los matemáticos iban desarrollando una herramienta que a la postre iba a salvar más vidas que las que todos los inventores hubieran imaginado salvar con sus “locos cacharros”. Dicha herramienta matemática es lo que hoy se conoce como Teoría de Funciones de una Variable Compleja. Entre las muchas aplicaciones que se siguen de esta teoría de matemática pura, se encuentra la aplicación a la comunicación por radio.

En efecto, a lo largo del siglo XIX se fue construyendo la representación simbólica de las magnitudes físicas dotadas de una orientación, comenzando por el plano, donde los números complejos juegan un papel fundamental. Los trabajos pioneros de Gauss en 1813: “Theoria attractions corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata” (ver [115]), George Green (1793-1841) en 1828: “An essay on the application of Mathematical Analysis to the theories of Elasticity and Magnetism” (ver [130]) y Mikhail Vasilevich Ostrogradskiǐ (1801-1861) en 1828: “Note sur la théorie de la Chaleur” (ver [215]), en los cuales se recoge lo que hoy en día conocemos como *Teorema de la Divergencia* (ver [272] y [67, pag.252]), así como los cuaternios de Willian Rowan Hamilton (1805-1865), descubiertos por él en 1843 (ver [87, 312]); fueron, entre otros, la fuente de inspiración matemática que llevaron al gran científico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) a establecer, en 1865, que las leyes experimentales de la electricidad y el magnetismo (entre ellas la conocida como, la ley de Gauss para campos magnéticos) podían agruparse de una forma matemática más concisa en un conjunto de ocho ecuaciones que describen y cuantifican los campos de fuerzas electromagnéticas (ver [195, 196]). En 1884 Oliver Heaviside (1850-1925) y Willard Gibbs (1839-1903) redujeron, el mencionado conjunto, a cuatro ecuaciones formuladas en la notación vectorial actual, las cuales se conocen como las Ecuaciones de Maxwell (ver [139, 47]).

Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) en 1887, reformuló las ecuaciones de Maxwell y probó experimentalmente que las ondas electromagnéticas pueden viajar a través del aire y del vacío, como había sugerido Maxwell, llegando a construir un emisor y un receptor de ondas en su laboratorio(ver [143, 172]).

Las ondas hercianas, como vehículo de transmisión de información, junto a la informática, en su acepción más amplia, como conjunto de técnicas, procesos y máquinas que el hombre ha creado para apoyar y potenciar su capacidad de memoria, pensamiento, comunicación y almacenamiento de datos; constituyen dos de los grandes pilares de nuestra civilización actual.

Guillermo Marconi (1874-1937) (Premio Nobel de Física en 1909 compartido con Card Ferdinand Braun (1850-1918)) es conocido popularmente como el inventor de la radio, pero esto no es cierto ya que su dispositivo fue elaborado en base a patentes y experimentos previos de otros científicos o inventores tales como el citado Hertz, Aleksandr Stepánovich Popov (1859-1905), Braun, Sir Oliver Joseph Lodge (1851-1940) y principalmente Nikola Tesla (1856-1943) (Marconi llegó a confesar que había copiado la patente de Braun). Marconi patentó la radio en 1897 en el Reino Unido, y en los años posteriores la paternidad fue disputada por varias personas hasta que en el año 1943, la Corte Suprema de los Estados Unidos acreditó a Tesla como el inventor de la radio. Lo que resulta innegable es que Marconi desarrolló el primer sistema práctico para la transmisión por radio a larga distancia y fue el gran impulsor, difusor y explotador de la misma. Fundó "The Wireless Telegrapf and Signal Company", por medio dicha empresa comercializó no solamente la radio sino también todo su equipamiento. Creó su propio mecanismo para la emisión y recepción de ondas radiales. En un primer momento demostró que se podía transmitir sin hilos a una distancia hasta de dos kilómetros (en 1894, un año antes que Marconi, Lodge fue la primera persona en transmitir una señal de radio). En diciembre de 1901 estableció una comunicación entre Poldhu (Cornwall, Reino Unido) y Saint John's (Terranova), entre las cuales media una distancia de 3.360 km y en 1903 logró transmitir mensajes entre Estados Unidos e Inglaterra. Pocos años después aseguró la comunicación entre Inglaterra y África del Sur, Australia y la India. Alcanzó la fama mundial con motivo del gran papel que jugó su radio, salvando numerosas vidas humanas, con motivo de los hundimientos de los barcos Republic en 1909 y Titanic en 1912.

Me gustaría terminar esta breve información sobre los orígenes de la radio citando a Reginald Aubrey Fessenden (1866-1932), inventor canadiense que a los 27 años era ya director del Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad de Pittsburgh. Entre sus logros citamos: la primera transmisión de audio por radio (1900), la primera comunicación transatlántica en ambos sentidos (1906) y la primera transmisión de audio para entretenimiento y de música (1906) (ver [86, 63]).

La Teoría de Funciones de una Variable Compleja, a la que anteriormente nos hemos referido, trata con funciones cuyo dominio e imagen están contenidos en el conjunto de los números complejos y constituye una poderosa y bella rama de las matemáticas con presencia en diversas áreas de las mismas y con gran influencia en muchas otras de la Ciencia en general.

Como hemos recordado anteriormente, a Kronecker se le considera como el máximo exponente del constructivismo y afirmaba que: "*Los números naturales fueron hechos por Dios y el resto es trabajo del hombre*"; pues bien, sin ninguna duda, los números complejos son uno de los inventos matemáticos más fascinantes creado por el hombre. Durante siglos fueron un prodigio para matemáticos y filósofos. Pasaron casi trescientos años desde su aparición en la obra *Ars Magna* (El Gran Arte) de Girolano Cardano (1501-1576), publicada en 1545, hasta la publicación de una definición formal (tal como la manejamos hoy en día) introducida por William Rowan Hamilton (1805-1865), en 1835.

En la escuela de mi época, al menos en la escuela de mi padre, se nos decía que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tenía por solución $i = \sqrt{-1}$, la cual era un "número imaginario". Con ello se nos ilustraba acerca de las dificultades de entendimiento que presentan los números complejos. La primera referencia escrita, que se conoce, sobre la raíz cuadrada de un número negativo aparece en la obra *Stereometría* de Heron de Alexandria (10-75), alrededor del siglo I. La siguiente referencia aparece en la obra *Arithmetica* de Diophantus (200-284), publicada en el año 275. Diophantus, en su intento de calcular los lados de un triángulo rectángulo de área siete y de perímetro doce, plantea resolver la ecuación de segundo grado: $336x^2 - 172x + 24 = 0$, cuyas raíces son complejas, como hoy bien conocemos.

El matemático hindú Mahavira (vivió en el siglo IX), en su *Tratado de los Números Negativos*, escrito alrededor del año 850, escribía: "*como en la naturaleza de las cosas una cantidad negativa no es un cuadrado, por tanto no puede tener raíz negativa*"; mientras que su compatriota Bhaskara (1114-1185), alrededor de

1150, afirmaba: "*el cuadrado de un número positivo o negativo, es positivo; la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; no existe raíz cuadrada de un número negativo ya que un número negativo no es un cuadrado*" (ver [179, 40]).

La primera constancia escrita que se tiene sobre el manejo algebraico de la raíz cuadrada de un número negativo aparece en la obra *Ars Magna* de Girolano Cardano, publicada en 1545 y donde planteaba el siguiente problema: "Si alguien te pide dividir diez en dos partes cuyo producto sea cuarenta, es evidente que esta cuestión es imposible. No obstante nosotros la resolvemos de la siguiente forma". Él formulaba el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y &= 10 \\ xy &= 40 \end{cases}$$

obteniendo por solución, escrita en terminología moderna, $x = 5 + \sqrt{-15}$ e $y = 5 - \sqrt{-15}$. Cardano no da interpretación a la raíz cuadrada de un número negativo, pero observa que bajo las hipótesis de que tales cantidades satisfagan las reglas algebraicas usuales, entonces uno puede comprobar que dichas cantidades son soluciones del sistema.

Cardano también estudia en su obra las ecuaciones de tercer grado del tipo: $x^3 = ax + b$ y aplicando la Fórmula de Tartaglia (ver por ejemplo [30, Ch.V.5], [50, pag. 133] o [51, pag. 166]) obtiene una fórmula para las soluciones, en función de los coeficientes a y b. En el caso $x^3 = 15x + 4$, obtiene como solución $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, donde aparecen raíces cuadradas de números negativos a las que él llamaba "quantitas sophistica" y que tal vez podían ser traducidas como un "número formal". Por otra parte la ecuación tiene al número cuatro como solución obvia, lo que pone en entredicho la solución dada por Cardano.

Rafael Bombelli (1526-1572) desarrolla el álgebra de Cardano sin preocuparse demasiado de la naturaleza de las "raíces imposibles" (raíces cuadradas de números negativos) y en su obra *L'algebra*, publicada en 1572, proporcionó varias reglas de cálculo entre lo que hoy en día conocemos como números complejos, manipulando las raíces imposibles como si fuesen números ordinarios. Así, por ejemplo, estableció que $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$, y por consiguiente la solución "imposible" de Cardano coincide con el número
cuatro, disfrazado de número complejo. De esta forma Bombelli muestra, por primera vez, el arte de encontrar soluciones reales de ecuaciones, con la ayuda de los números complejos. En este sentido fue un adelantado a Hadamard que afirmaba: "*El camino más corto entre dos verdades en el campo real pasa a través del campo complejo*".

El siguiente sencillo ejemplo de Hadamard, ilustra la mencionada afirmación. Se trata de probar que el producto de la suma de cuadrados es de nuevo suma de cuadrados. En efecto:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) =$$

$$[(a + bi)(c + di)][(a - bi)(c - di)] = (u + iv)(u - iv) = u^2 + v^2.$$

Los hechos y argumentos que aparecen en la obra de Bombelli se pueden considerar como el nacimiento de que lo hoy conocemos por Teoría de Funciones de Variable Compleja.

Descartes en *La Géométrie* (1637) es el primero que introduce la distinción entre número real e imaginario, asignándole este último apelativo a las raíces cuadradas de números negativos, e interpretando la aparición de éstas, como un signo de que el problema en cuestión no tiene solución. Esta opinión era compartida más tarde por Isaac Newton (1642-1727). En su época, los números complejos aún no habían surgido en ninguna parte en la Física.

Albert Girard (1595-1632) tuvo alguna temprana premonición sobre el Teorema Fundamental del Álgebra, la cual quedó plasmada en su obra *L´invention Nouvelle en l'Algebra* (1629), donde sugiere que las ecuaciones de grado n tienen n raíces. A este respecto, Descartes decía que, en esencia, uno puede imaginar, para cada ecuación, tantas raíces como indica su grado, pero estas raíces imaginadas no siempre se corresponden con cantidades reales.

La primera noticia que se tiene sobre la correspondencia entre los números complejos y los puntos del plano se debe a John Wallis (1616-1703) quien en su obra *De algebra tractatus* publicada en 1685 y más tarde ampliada en una segunda edición (1693), representaba a los números complejos en la forma siguiente: sobre una recta fijada representaba la medida de la parte real en la dirección dada por el signo (izquierda si era negativo y derecha si era positivo), a continuación y formando un ángulo recto representaba la medida de la parte imaginaria. Se desconocen las razones por las que sus contemporáneos ignoraron esta representación.

Los números complejos fueron ampliamente utilizados en el siglo XVII siguiendo la filosofía de que podían ser manipulados como si fuesen números reales. Alrededor de 1712 se generó una famosa polémica entre Leibniz y Johann (Jean o John) Bernoulli (1667-1748).

Para Johann Bernoulli, los logaritmos de los números negativos coincidían con los logaritmos de los números positivos y por consiguiente el logaritmo de un número negativo era un número real. Su argumento era el siguiente: $2\ln(-x) = \ln(-x)^2 = \ln x^2 = 2\ln x$. De donde se sigue que $\ln(-1) = \ln(1) = 0$ (donde por ln estamos notando lo que hoy en día conocemos como logaritmo neperiano).

Leibniz por el contrario aseguraba que el logaritmo de un tal número era un número complejo. Él partía del desarrollo: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ y tomando $x = -2$, deducía claramente que el $\ln(-1)$ no es cero. Es muy conocida la opinión que Leibniz tenía acerca de los números imaginarios, eran "*un maravilloso vuelo del Espíritu de Dios, casi un anfibio entre el ser y el no ser*".

La controversia entre Bernoulli y Leibniz fue resuelta por Leonhard Paul Euler (1707-1783) a favor de Leibniz; utilizando, a tal efecto, lo que hoy en día conocemos como *fórmula de Euler*: $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$. Según Euler: $\ln(-x) = \ln[(-1)x] = \ln x + \ln(-1)$ y para obtener el valor de $\ln(-1)$, sustituyó t por π en la fórmula anterior, obteniendo $e^{i\pi} = -1$. Aplicando logaritmos a los dos lados de la igualdad deducía: $\ln(-1) = \ln e^{i\pi} = i\pi$. Como las funciones trigonométricas son periódicas, hay infinitos logaritmos posibles por cada número negativo: $e^{i\pi(2n+1)} = -1$.

Hemos de insistir que Euler, al igual que sus contemporáneos, utilizaba los números complejos en sus cálculos de una forma intuitiva y sin conocer exactamente que es lo que eran, pero lo que resulta sorprendente es que dichos cálculos eran correctos. Él fue el primero en utilizar la notación $i = \sqrt{-1}$ y el símbolo e en algunas de sus cartas escritas en 1727, realizando un estudio profundo del mismo así como del número π. Respecto a la fórmula de Euler hemos de decir que previamente, en el año 1714, Roger Cotes (1681- 1716) obtenía una fórmula equivalente: $\ln(\cos t + i\mathrm{sen}\, t) = it$. Por otra parte, aunque en la obra de Abraham de Moivre (1667-1754) titulada *Miscellanea Analityca*, publicada en 1730, no aparezca de forma explícita su famosa fórmula: $(\cos t + i\mathrm{sen}\, t)^n = \cos(nt) + i\mathrm{sen}(nt)$, es indudable que dicha fórmula era familiar para de Moivre e incluso muchos años antes, ya que en su artículo *Philosophical Transactions* publicado en 1707, él escribía:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{sen}(nt) + \sqrt{-1}\cos(nt))^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\mathrm{sen}(nt) - \sqrt{-1}\cos(nt))^{\frac{1}{n}} = \mathrm{sen}\, t$$

y en Miscellanea Analityca aparece la igualdad:

$$(\cos t \pm i\ \mathrm{sen}\ t)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2K\pi \pm t}{n} \pm i\ \mathrm{sen}\ \frac{2K\pi \pm t}{n}$$

Aunque en 1728 Euler conocía la trascendental relación entre i, π y e dada por $i^i = e^{-\frac{1}{2}\pi}$, no es hasta 1748 cuando, en su más famoso libro titulado *Introductio in Analysin infinitorium*, aparecen las fórmulas: $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ y $\mathrm{sen}(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ las cuales relacionan de una forma elegante las funciones trigonométricas con la función exponencial y de donde trivialmente se sigue la fórmula que lleva su nombre, una de las fórmulas matemáticas más asombrosas jamás descubierta, a la que hacía sus honores el profesor Cañada en su Discurso de entrada en esta Academia. El lector interesado puede consultar, entre otros: [87, 271, 179, 131, 41, 230, 163].

La fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$ relaciona los cinco números más importantes de la Matemática y las más importantes operaciones elementales de la misma. El gran matemático Benjamin Peirce (1809-1880), profesor de la universidad de Harvard durante unos cincuenta años e introductor, entre otros, de lo que hoy en día conocemos como descomposición de Pierce, en diversas estructuras algebraicas, decía: “Caballeros, no comprendemos la fórmula y no sabemos lo que significa, pero la hemos demostrado, y por tanto sabemos que tiene que ser verdadera”.

Por muchos expertos ha sido elegida como la fórmula más bella de todos los tiempos. Es atractiva para místicos, matemáticos y científicos en general. Los matemáticos e historiadores de la matemática Edward Kasner (1878-1955) y James Roy Newman (1907-1966), autores del libro *Mathematics and the Imagination* (1940), donde recogen la cita anterior de Pierce, afirman: “lo único que podemos hacer es reproducir la ecuación y no dejar de preguntarnos por sus implicaciones”.

Denis Guedlj (1940-2010), profesor de Historia de las Ciencias de la Universidad de Paris VII, matemático, cineasta, actor, autor teatral y novelista, en su famosa novela *El teorema del loro*, publicada en 1998, narra el siguiente párrafo en el que involucra a dos de sus principales personajes:

"Ruche oyó que Max murmuraba con la mayor seriedad del mundo: Existe π en el aire y π en el agua. No dejen de admirar, cuando salgan, la fórmula escrita encima de la puerta. Es de Leonhard Euler. Es, sin duda la más hermosa de todas las matemáticas. Todos levantaron la cabeza al salir y leyeron:

$$e^{i\pi} = -1$$

Ruche, el cuello torcido, examinaba la cosa. Corta era corta. Pero hermosa, diablos, ¿por qué era hermosa?. Y no solamente hermosa, sino ¡la más hermosa!. Ruche la diseccionó. Cinco signos, que él conocía muy bien. Salvo uno.......... había una e. Nunca vista antes. ¿Era la que hacía tan hermosa la fórmula?. Se lo preguntó a Max, que con el cuello casi roto también contemplaba la fórmula al igual que en Roma los turistas admiran el techo de la Sixtina".

La primera representación de los números complejos como vectores del plano que atrajo la atención de los matemáticos, fue dada por el topógrafo noruego Gaspar Wessel (1745-1818). Él era un autodidacta y en un informe presentado a la Real Academia Danesa en 1787 sobre los métodos matemáticos que estaba desarrollando, ya incluía su brillante aportación a la Matemática, la cual no es otra que la interpretación geométrica de los números complejos.

En 1796, Wessel había terminado la triangulación de Dinamarca y utilizó los datos obtenidos para elaborar el primer mapa exacto del país. En el mismo año escribió su primer y único documento matemático titulado: *On the analytical representation-an essay*, en el cual expresaba la interpretación geométrica de los números complejos, y lo presentó en una reunión de la Real Academia Danesa el 10 de marzo de 1797. Este documento fue publicado en los Transactions de la Academia Danesa en 1798. Wessel introduce un sistema de ejes coordenados perpendiculares, considerando +1 para la unidad en uno de los ejes, y $+\varepsilon$ para la unidad en el otro eje . Wessel escribió:

"Sea $+1$ la unidad rectilínea positiva y $+\varepsilon$ otra unidad perpendicular a la unidad positiva tomada antes, teniendo ambas el mismo origen; entonces el ángulo de la dirección de $+1$ resulta igual a $0°$, y por lo tanto para -1 es $180°$, para $+\varepsilon$ es $90°$, y para $-\varepsilon$ es $-90°$ ó $270°$. Por la regla que establece que el ángulo de la dirección del producto es igual a la suma de los ángulos de los factores, tenemos: $(+1)(+1) = +1$; $(+1)(-1) = -1$; $(-1)(-1) = +1$; $(+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon$; $(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1$; $(+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1$; $(-\varepsilon)(-\varepsilon) = -1$. De este resultado se observa que $+\varepsilon$ es igual a $\sqrt{-1}$, y que la divergencia del producto se determina de tal forma que ninguna de las reglas operativas comunes son contravenidas"

La tabla de multiplicación anterior es interpretada geométricamente, como que la multiplicación por un número complejo de longitud (módulo) uno no es otra cosa que un giro en el plano. Así por ejemplo si α es un número real, entonces $i\alpha$ no es otra cosa que una rotación alrededor del origen 0 del segmento $[0, \alpha]$.

Wessel estableció que cualquier segmento, con origen en el punto de intersección de los ejes coordenados, podía ser representado mediante un número complejo $a + b(+\varepsilon)$ y que, de acuerdo con reglas expresadas anteriormente, y respetando las propiedades usuales de la suma y el producto entre números reales, la multiplicación entre dos números complejos venía dada por:

$$(a + b(+\varepsilon))(c + d(+\varepsilon)) = (ac - bd) + (ad + bc)(+\varepsilon)).$$

Por consiguiente Wessel se adelantó a la noción de espacio vectorial tal como hoy lo conocemos, de modo que los números complejos, desde el punto de vista geométrico, quedan perfectamente definidos. Su trabajo pasó desapercibido hasta que un siglo más tarde (en 1897), fue traducido al francés. Mientras tanto la comunidad matemática atribuía la idea a Jean-Robert Argand (1768-1822) (otro aficionado al igual que Wessel) el cual redescubría dicha representación en 1806, en un trabajo publicado a sus expensas titulado: *su Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. En 1813 este ensayo fue publicado en la revista francesa Annales de Mathématiques, para un público más especializado. Desde entonces la representación geométrica de los números complejos viene siendo conocida, en las publicaciones francesas sobre todo, como el diagrama de Argand. En este ensayo también se propone por vez primera la idea de módulo para indicar la magnitud de los vectores y los números complejos, así como la típica notación para los vectores con una flecha horizontal sobre las letras que señalan sus extremos. La influencia de este trabajo, al igual que el de Wessel, fue escasa durante mucho tiempo ya que su manejo algebraico presentaba ciertas dificultades. En particular el producto que depende del concepto de ángulo no definido con precisión, como el lector habrá podido observar. Además muchos matemáticos de la época pensaban que la interpretación geométrica de los números complejos no era compatible con los cánones que se aplicaban al álgebra desarrollada hasta entonces.

En 1831 Gauss presentaba con todo detalle la representación geométrica de los números complejos estableciendo una obvia correspondencia entre la parte real y la parte imaginaria de un número complejo $a + ib$ con las coordenadas rectangulares del punto del plano (a, b). Esta idea la había utilizado en su Tesis Doctoral acerca del Teorema fundamental del álgebra, aunque sin una mención explícita sobre ello. Sin embargo, sí lo hizo después, en 1811, en una carta enviada a su amigo el astrónomo Friedich Bessel (1784-1846). Finalmente en 1831, en un comentario de su artículo *Theoria Residuorum Biquadraticorum* la idea era plenamente desarrollada, separándose de la idea de Wessel y Argand que habían considerado los números complejos como segmentos del plano, como ya hemos referido anteriormente. Como consecuencia los números complejos comenzaron a adquirir aire de respetabilidad y las viejas ideas de la no existencia de los "números imaginarios" comenzaron a ser abandonadas. Gauss afirmaba: "Este tema (de las magnitudes imaginarias) ha sido tratado hasta ahora desde un punto de vista erróneo, rodeado de una misteriosa oscuridad, y esto es debido a la utilización de una notación inadecuada. Si, por ejemplo, $+1, -1$ y $\sqrt{-1}$ hubieran sido denominadas directa, inversa y unidad lateral respectivamente, en lugar de positiva, negativa e imaginaria (o incluso imposible) tal oscuridad hubiera estado fuera de lugar.”

Gauss consideró que su presentación resultaba la más correcta, haciendo que todas las dificultades sobre estos números desaparecieran. De este modo los números reales representaban una recta, mientras que los complejos representaban el plano. Desde entonces tanto a la representación de Wessel-Argand, como a la de Gauss, la conocemos por el nombre de plano complejo. Los chovinistas franceses hacen referencia al plano complejo como el plano de Argand, mientras que los no menos chovinistas alemanes lo denotan como el plano de Gauss. En justicia deberíamos de hablar del plano de Wessel-Argand-Gauss. Gauss introdujo también el nombre de “números complejos” para la cantidades $a + bi$, y se opuso al término “números imaginarios” ya que consideraba que ese apelativo era precisamente uno de los principales causantes del halo de misterio que había rodeado siempre a estos números. Sin embargo no consiguió eliminar el nombre de “imaginarios” para aquellos números que quedan representados por el eje vertical de coordenadas, ya que dicho nombre estaba, y sigue estando, muy arraigado entre los matemáticos.

Sin menoscabo de lo anteriormente expuesto, hay ciertos argumentos para pensar que allá por el año 1749, Euler tenía visualizados los números complejos como puntos del plano ya que en su artículo: *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Benoulli su les logaritmes des nombres négatifs et imaginaires* (Mémories de l’Académie des Sciences de Berlin, 1949), afirmaba que: “En cualquier otro caso el número x es imaginario: para encontrarlo uno tiene sólo que tomar un arco g en el círculo unidad y determinar su seno y coseno. El número buscado es entonces $x = \cos(g) + \sqrt{-1}\mathrm{sen}(g)$" .

John Warren (1796-1852) era un convencido de la superioridad de la geometría como medio de demostración a la utilización de meros símbolos de cantidades. En 1828 publica, en la Universidad de Cambridge, un trabajo titulado *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of Negative Quantities*. Los dias 19 de febrero y 4 de junio de 1829 pronuncia sendas conferencias en la Royal Society sobre el tema objeto de su artículo, llegando a la conclusión de que los números complejos se podían representar como vectores del plano y por consiguiente las operaciones aritméticas elementales entre números complejos adquieren una interpretación geométrica natural: la suma entre complejos no es otra cosa que la suma vectorial y la multiplicación compleja es precisamente el producto de un vector por un escalar más la rotación de dicho vector.

Hamilton, influenciado por la lectura del trabajo de Warren usó estos conocimiento para tratar de trasladar al espacio tridimensional una teoría análoga a la de Wessel-Argand-Warren. Durante muchos años intentó extender los números complejos a un nuevo sistema de números de dimensión tres, que pudieran jugar un papel geométrico en el espacio, análogo al que desempeñan los números complejos en el plano, con el fin de representar rotaciones y movimientos de vectores en el espacio. En lenguaje moderno, Hamilton buscaba un álgebra real normada de dimensión tres. Hoy en día conocemos que tales álgebras no existen. No obstante su empeño le llevó a dar el paso definitivo acerca de la definición de los números complejos como pares ordenados de numeros reales (a, b) sometidos a las siguientes operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

bajo las cuales el conjunto, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de los mencionados pares ordenados, tiene estructura de cuerpo conmutativo, conocido como el cuerpo de los números complejos y universalmente denotado por $\mathbb{C}$.

La mencionada formulación apareció en un trabajo de Hamilton publicado en 1835, bajo el titulo "*Theory of Conjugate Functions, or Algebras as the Science of Pure Time*. Así pues, habían pasado casi tres siglos después de la aparición de los números complejos en la obra de Cardano para llegar a formular una definición satisfactoria de los mismos que permitió dar un gran impulso, no solamente a la Teoría de Funciones de una Variable Compleja, sino también a la Matemática y Ciencia en general.

En el año 1837, Gauss escribía una carta a su amigo Wolfgang Bolyai (1775-1856), en la que le decía que la representación de los números complejos como pares ordenados de números reales, era familiar para él desde el año 1831.

Desde el punto de vista de Hamilton el número i es el par $(0, 1)$, con lo que queda erradicado el "misterio del número imaginario $\sqrt{-1}$", así como la objeción de que los cálculos con los números complejos no eran plenamente satisfactorios, si dichos números eran considerados como vectores o puntos del plano. También queda perfectamente justificada la notación $a + ib$, con a, b números reales, para representar a los complejos, sin más que tener en cuenta que todo real a puede verse como el par $(a, 0)$. Hemos de decir que a veces resulta provechoso y prácticamente imprescindible ver los números complejos como vectores o puntos, en particular cuando se trata de hacer más comprensible su manejo, y por supuesto en sus aplicaciones a otros campos de la Ciencia. A título de ejemplo, según ya conocemos, un giro en el plano no es otra cosa que la multiplicación por un complejo de longitud (módulo) uno. Por otra parte el interés por resolver ecuaciones algebraicas, origen del nacimiento del Álgebra y que ocupó durante siglos a muchos matemáticos, cuenta desde entonces con una potente herramienta.

A pesar del "fracaso" de Hamilton en el intento de introducir una multiplicación en tripletas de números reales (a, b, c) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que extendiese la multiplicación establecida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = $\mathbb{C}$, sí consiguió su objetivo de obtener unos números que extienden a los complejos y que sirven para representar giros en el espacio euclídeo tridimensional. Dichos números no son otros que los cuaternios, los cuales se pueden expresar de la forma: $ae + bi + cj + dk$, donde a, b, c, d son números reales y $e = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0), j = (0, 0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 0, 1)$, es la base canónica del espacio vectorial real de dimensión cuatro. El producto entre dichos números viene dado por:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e, \; ij = -ji = k, \text{ y } e \text{ es elemento unidad.}$$

El resto de los productos se obtienen de los anteriores por intercambio cíclico de i, j y k.

$\mathbb{R}^4$, dotado del anterior producto y suma y producto por escalares los usuales, se convierte en un álgebra asociativa no conmutativa de dimension 4 sobre $\mathbb{R}$, conocida por el nombre del álgebra real de los cuaternios (nombre que le dio el propio Hamilton), que se suele notar como $\mathbb{H}$. Otra operación importante en el álgebra $\mathbb{H}$ es la conocida como *conjugación* en $\mathbb{H}$. Para cada elemento, $q = a+ib+jc+kd$ su conjugado viene dado por $q^* = a-ib-jc-kd$. Las partes real e imaginaria de q se definen como $\frac{1}{2}(q+q^*)$ y $\frac{1}{2}(q-q^*)$ respectivamente. $\mathbb{H}$ se puede dotar de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiendo sobre los elementos básicos:

$$\langle i, i \rangle = \langle j, j \rangle = \langle k, k \rangle = \langle 1, 1 \rangle = 1$$

e igual a cero en los restantes. Claramente si $q = a + ib + jc + kd$, entonces $\langle q, q \rangle = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, por consiguiente la norma que induce el anterior producto escalar sobre $\mathbb{H}$ coincide con la norma euclídea de $\mathbb{R}^4$. Cada cuaternio no nulo q admite un único inverso, q^{-1}, que coincide con $\dfrac{q^*}{\|q\|^2}$ (el paralelismo con $\mathbb{C}$ es sorprendente). Todo cuaternio de longitud uno representa un giro en el espacio. En efecto, la aplicación $(a, b, c) \mapsto ai + bj + ck$ nos proporciona una identificación total entre el espacio $\mathbb{R}^3$ con la parte imaginaria de $\mathbb{H}$. Cada cuaternio no nulo r permite definir una nueva "conjugación" en $\mathbb{H}$ mediante la aplicación $C_r(q) := rqr^{-1}$. Es sencillo comprobar que cada cojugación C_r deja invariante la parte real de q, es decir $C_r(q)$ y q tienen la misma parte real. En particular, cada C_r deja invariante a $\mathbb{R}^3$. Más aún, si tomamos r de norma uno, con parte real igual a $\cos(\theta)$, la conjugación C_r define un giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo 2θ alrededor del eje determinado por la parte imaginaria de r. Observamos que esta propiedad también se verifica para $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, puesto que incluso con parte imaginaria de r igual a cero, el giro de ángulo cero es la identidad en $\mathbb{R}^3$. Es interesante observar que bajo este punto de vista, tanto el eje de giro como el ángulo están incorporados en el cuaternio r y esto simplifica enormemente los cálculos.

Gran parte de las aplicaciones de los cuaternios se deben a la propiedad que acabamos de relatar.

Eric Temple Bell (1883-1960) en [26, pag. 354] comenta que "los cuaternios tienen una historia demasiado larga para ser contada aquí. Incluso Gauss con su anticipación en 1817 no es primero en el campo; Euler le precede con un resultado aislado que es más simple si se interpreta en términos de cuaternios. El origen de los cuaternios puede irse aún más lejos. Augusto de Morgan una vez, medio en broma, ofreció remontar su historia desde los antiguos hindúes hasta la Reina Victoria".

Ahora bien lo realmente importante es que el gran descubrimiento de Hamilton hacía posible, no solamente la aparición de un álgebra que nos permitía representar rotaciones en el espacio tridimensional, sino que, dicha álgebra, rompía con uno de los cánones del álgebra de la época, como lo es la propiedad conmutatividad del producto. Un descubrimiento de primer orden tal vez comparable al de las geometrías no Euclídeas.

Una amplia información sobre el descubrimiento mencionado, puede ser obtenida a través de la lectura de [87, 253, 26]), incluido la conocida parte romántica del mismo cuando el día 16 de Octubre de 1843, Hamilton tuvo la inspiración definitiva acerca de su Teoría de Cuaternios, mientras paseaba junto a su esposa por el Canal Real a las afueras de Dublín. No pudiéndose reprimir, con ayuda de una navaja, plasmó sobre una piedra del Puente Brougham la fórmula fundamental que hemos dado anteriormente:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e.$$

Durante una serie de años los cuaternios tuvieron una gran aceptación. Como ya hemos mencionado anteriormente fueron utilizados por Maxwell en sus ecuaciones de electromagnetismo y tras la muerte de Hamilton se desarrolló toda una escuela de seguidores. Tras la formulación de las ecuaciones de Maxwell, en el lenguaje del análisis vectorial, dada por Heaviside y Gibbs, donde los cuaternios no aparecen de forma explícita, estos perdieron parte de la atracción de los científicos, la cual no regresó hasta siglo XX de manos de la Física. Por ejemplo las matrices de spin $\frac{1}{2}$ de Wolfgang Erns Pauli (1900-1958), de las que dependen los momentos angulares de la Mecánica Cuántica e introducidas por el mencionado autor en 1927 (ver[183]):

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se pueden identificar, salvo constantes, con los cuaternios i, j, k; ya que el álgebra real $\mathbb{H}$ es isomorfa a la subálgebra de las matrices de orden 2×2, con entradas en los números complejos, generada por la expansión lineal real del conjunto $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$, donde I denota la matriz identidad. Un tal isomorfismo viene dado por:

$$e \to I, \ \ i \to i\sigma_z, \ \ j \to -i\sigma_y, \ \ k \to -i\sigma_x$$

(ver si acaso [87, pag. 196]).

Hoy en día los cuaternios y sus generalizaciones sobre cuerpos arbitrarios impregnan no solo la Física Fundamental, sino también diversas áreas de la Matemática. Incluso se utilizan en algo tan insospechado por su creador (creadores) como es el caso de diseñar videojuegos, un tal ejemplo es el bien conocido Tomb Raider, o la robótica la cual constituye otro de los pilares de nuestra civilización.

A la luz de nuestro conocimiento actual, esto no es de extrañar ya que, la utilización del análisis cuaterniónico en los movimientos de objetos, permite reproducir un tal movimiento mediante un solo procedimiento (función) cuyo argumento son los cuaternios. Según hemos visto, ellos poseen unas leyes de composición simples, las rotaciones y traslaciones que inducen en $\mathbb{R}^3$ son muy sencillas y eficaces, dando lugar todo ello a un fácil cálculo computacional.

Los ejemplos de relación entre la Matemática pura y la tecnología que acabamos de presentar llevan la misma intención didáctica que el de von Neumann, pero sobre todo queremos resaltar una vez más la importancia de la belleza en la Matemática. Ahora parece apropiado recordar el siguiente dicho atribuido a Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), premio Nobel de Física en 1933:

"*Dios es un matemático, de modo que incluso con poca evidencia experimental, una matemática bonita tiene una gran posibilidad de ser correcta*".

Concluimos nuestro particular "paseo" por los cuaternios extendiendo (con la ayuda de ellos) al caso de ocho variables, la trivial identidad que establecíamos acerca de que producto de la suma de cuadrados es de nuevo suma de cuadrados. La nueva identidad es conocida como identidad de Lagrange y reza como sigue: Sean a_k y b_k, $k = 1, 2, 3, 4$, números reales; entonces:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2,$$

donde c_k, $k = 1, 2, 3, 4$, son también números reales.

En efecto: sean p, q los cuaternios dados por

$$p = a_1 e + a_2 i + a_3 j + a_4 k$$

$$q = b_1 e + b_2 i + b_3 j + b_4 k,$$

entonces $pq = c_1 e + c_2 i + c_3 j + c_4 k$, y la identidad que deseamos probar es equivalente a esta otra:

$$\langle pq, pq\rangle = \langle p, p\rangle\langle q, q\rangle,$$

la cual es bien conocido ser cierta (ver si acaso [49, epígrafe 2.5.2]).

La afirmación de Hadamard, que expusimos anteriormente, podíamos parafrasearla ahora en los siguientes términos:

"El camino más corto entre dos verdades en el campo real pasa a través del campo cuaterniónico."

3 Funciones complejas de variable compleja

Comenzamos esta sección con el Teorema Fundamental del Álgebra, un hito del intelecto humano y que hoy en día suele enunciarse en los siguientes términos:

"Todo polinomio de grado n mayor o igual a uno, con coeficientes reales o complejos, tiene por lo menos una raíz, real o compleja".

Como consecuencia se tiene que si p es un polinomio de grado n mayor que cero, entonces la ecuación $p(z) = 0$, tiene exactamente n soluciones complejas, contando su orden de multiplicidad. De hecho ambos enunciados son equivalentes, como es bien conocido.

Si uno considera un polinomio con coeficientes reales $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con a_n no cero, y trata de encontrar sus raíces es decir las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$, entonces el camino lógico a seguir es el que siguieron los pioneros, tratando de encontrar soluciones constructivas a partir de los coeficientes de $p(x)$.

Como hemos dicho al comienzo del apartado anterior el intento de resolver ecuaciones se remonta a los egipcios e hindues, pero la primera vez que aparece un estudio exhaustivo por escrito de ecuaciones de primer y segundo grado, es en un tratado de álgebra de Al-Juarismi , titulado, en castellano, *Compendio de cálculo por compleción y comparación.* Al-Juarismi fue un matemático, geógrafo y astrónomo persa- musulmán- chií que vivió aproximadamente entre los años 780 y 850. Lo primero que expone en su obra son los números naturales para pasar después a encontrar soluciones (que por supuesto son números naturales) de ecuaciones, utilizando métodos de tipo geométrico y algebraico. Las soluciones coinciden con las que hoy en día se aprenden en la enseñanza media (ver [286]). Hemos de destacar que en el mencionado libro no aparecen símbolos de ninguna clase, solo palabras escritas en árabe.

A Al-Juarismi se le considera como el padre del álgebra así como el introductor de nuestro sistema de numeración cuyos orígenes se pierden en la noche de los tiempos. *El Álgebra* de Al-Juarismi fue traducida al latín por Gerardo de Cremona (1114-1187) y se utilizó como libro de texto en las universidades europeas hasta el siglo XVI.

Scipio dal Ferro (1465-1526) es aceptado, por lo general, como el primero que dio un método general para resolver ecuaciones de tercer grado, pero queda la incógnita de cuándo y cómo Ferro podía resolver todo tipo de dichas ecuaciones. Cuenta la “historia” que antes de morir comunicó su fórmula a su discípulo Antonio Maria del Fiore el cual presumía de conocer la fórmula maravillosa para resolver ecuaciones cúbicas y desafió a Tartaglia a una competición matemática, algo muy común en la época renacentista. La noche anterior a la fecha del desafío, el 22 de Febrero de 1535, Tartaglia redescubrió la fórmula y ganó la competición. Tartaglia habló de la fórmula a Cardano pero sin presentar la prueba, de ahí que Cardano tuviese la necesidad de reconstruirla. Todo ello llevó a una bien conocida disputa entre dal Ferro y Cardano, éste defendía que él había dado la prueba matemática de la solución, mientras que dal Ferro únicamente había presentado la solución.

Los éxitos obtenidos en las resoluciones de ecuaciones de tercer grado por medio de radicales en función de sus coeficientes, impulsaron a los matemáticos, sobre todo los jóvenes, a encontrar soluciones de ecuaciones de grado mayor que tres. Tal es el caso de Lodovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano y previamente sirviente de éste. Ferrari conocía my bien los métodos de resolución de ecuaciones cúbicas que había estudiado con Cardano, ello le permitió presentar, en el año 1540, una solución de las ecuaciones de grado cuatro, reduciendo el problema a resolver una de grado tres. Este método, al igual que el de las ecuaciones de grado tres, fue incluido por Cardano en su Ars Magna. El lector interesado puede ver, entre otros [52, 30, 150]. Conviene recordar que al utilizar las fórmulas de Ferro-Tartaglia-Cardano, podían aparecer números complejos.

En los siguientes tres siglos los matemáticos y en particular los algebristas no cejaron en su intento de resolver ecuaciones de grado mayor que cuatro por medio de radicales. Vano intento porque en 1826 Abel probó que es imposible resolver, en general, ecuaciones de grado mayor que cuatro por medio de radicales (ver [1]). Como no podía ser de otra manera, durante todo este mismo tiempo, los matemáticos y científicos en general se preocuparon del problema de probar la existencia de raíces de $p(x)$.

Hemos recordado anteriormente que Girard, en 1629, fue el primero en conjeturar que todo polinomio de grado n tiene n raíces, pero no comenta nada acerca de si dichas raíces deben ser reales. Previamente Petrus Roth, del que solo se sabe que trabajó en la ciudad alemana de Nuremberg como calculista (reckoningmaster) hasta su muerte acaecida en 1617, escribió en su libro *Arihtmetica Philosophica* (1608), que toda ecuación polinómica con coeficientes reales de grado n puede tener n soluciones.

La historia de la prueba del Teorema Fundamental del Álgebra se desarrolla en paralelo con el descubrimiento de los números complejos y es por esta razón por la que muchos historiadores dicen que debía llamarse Teorema de los números complejos. Un magnífico resumen sobre el tema puede verse en [87]. Como norma general, antes de las "pruebas" presentadas por Gauss, los investigadores no se ocupan de probar la existencia de las raíces sino más bien de la forma que tienen. La conjetura de Girard es tomada tácitamente como un axioma y no dan justificación matemática a las fórmulas establecidas. Euler, sin duda animado por el hecho de que toda ecuación de grado cuatro siempre tiene soluciones complejas, llegó a formular el siguiente teorema para polinomios reales: Todo polinomio $p(x)$ de grado n posee exactamente n ceros en $\mathbb{C}$. Euler estableció una prueba rigurosa de su teorema para el caso $n \leq 4$ y en 1749 ataca el problema general. Gauss en su tesis doctoral titulada: *"Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica racional de una variable puede ser descompuesta en producto de factores reales de primero o de segundo grado"*, leída en la Universidad de Helmestedt en 1779, presenta la primera demostración “satisfactoria” del teorema Fundamental del Álgebra para polinomios reales. La novedad que aporta es que no es necesario calcular las raíces para probar su existencia. El argumento dado por Gauss es que si el polinomio p de grado n posee una raíz compleja $z = a + ib$, ésta representa un punto del plano (a, b) y este punto debe ser la intersección de las curvas algebraicas reales $Re\, p(z) = 0$ y $Im\, p(z) = 0$. Donde si $z = x + iy$ es un número complejo, entonces $Re\, z = x$ e $Im\, z = y$. Este argumento depende del gráfico de las curvas y por entonces era difícil demostrar que debían de tener una intersección no vacía. A pesar de esta laguna el teorema fue dado por cierto, si bien tuvieron que pasar más de cien años para que los topólogos pudieran confirmarlo acudiendo a sofisticados argumentos.

Gauss dio hasta cuatro pruebas (para algunos historiadores hasta cinco) del Teorema Fundamental del Álgebra. En la segunda prueba presentada en 1816, abandona las consideraciones geométricas y pasa a ser más algebraica pero todavía depende del Análisis Matemático, concretamente utiliza el hecho de que todo polinomio de grado impar posee una raíz en el eje real. La tercera prueba, dada también en 1816, depende de lo que hoy en día se conoce Teoría de Cauchy para funciones holomorfas, más concretamente se basa en el número de vueltas que la curva $p(z)$ da alrededor del origen $z = 0$ cuando z recorre una conveniente curva cerrada alrededor del origen. Concretamente en el lenguaje moderno la prueba se basa en el cálculo de la integral de contorno :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{p'(z)}{p(z)}dz.$$

La cuarta prueba establecida en 1849, es una variación de la primera y lo que hace es extender la prueba primera al caso de polinomios con coeficientes complejos, utilizando el argumento de que las cantidades imaginarias eran ya conocidas. En efecto: si $q(z)$ es un polinomio complejo, entonces $p(z) = q(\overline{z})q(z)$ es un polinomio con coeficientes reales. Por consiguiente si z_0 es un cero de p, entonces z_0 o $\overline{z_0}$ es un cero de q.

Hemos de recordar también a Argand quien en 1815 publicaba un artículo titulado: *Réflexions sur la nouvelle théorie d´analyse*, el cual contenía la que posiblemente podría ser la prueba más simple de todas las pruebas presentadas, hasta la fecha, del teorema que venimos comentando, para el caso de polinomios con coeficientes complejos, utilizando técnicas analíticas. Un resumen de dicha prueba lo presentó en 1806, en su ensayo sobre la representación geométrica de los números complejos, que hemos citado anteriormente.

La prueba de Argand es muy similar a la que presentó Cauchy en 1820 (ver [57]) la cual era una republicación, para el caso de polinomios con coeficientes complejos, de la que publicó en 1817 (ver [56]), para el caso de coeficientes reales. Cuánto conocía Cauchy acerca de las aportaciones de Argand y cuándo las aprendió, es una cuestión que, hasta donde yo sé, está todavía en debate. También resulta extraño que algunos historiadores citen a Gauss como el primero en establecer la prueba del mencionado teorema, para el caso de coeficientes complejos.

Son muchas las pruebas que se conocen hoy en día del Teorema Fundamental del Álgebra, pero todas ellas dependen de alguna manera del Análisis Matemático, es por lo que muchos matemáticos piensan que el nombre más apropiado debería de ser Teorema Fundamental del Análisis, sobre todo, porque las pruebas más bellas y simples se obtienen de la Teoría de funciones complejas de variable compleja. En este momento no nos resistimos a presentar la prueba que se deduce del Teorema de Liouville (Joseph Liouville 1809-1882).

Recordemos que una función f definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$ se dice que es holomorfa en Ω, si f es derivable en todo punto de Ω. Es decir si para todo punto z_0 en Ω, existe el limite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

A las funciones que son holomorfas en $\mathbb{C}$, se les denomina funciones enteras. Pues bien el Teorema de Liouville afirma que *toda función entera y acotada debe ser constante.*

Sea, pues, $p(z)$ un polinomio no constante, y supongamos que no tiene raíces. Ya que los polinomios son funciones enteras, se tiene que $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ es también una función entera. Ahora bien como $\lim_{z\to\infty} |p(z)| = +\infty$, se tiene que $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0$. En consecuencia f resulta ser una función acotada. Luego, por el Teorema de Liouville, f es una función constante, por lo que p también lo será. Lo que contradice nuestra hipótesis inicial, y por tanto p debe tener una raíz.

La Teoría de funciones de una variable compleja está plagada de hermosas obras de arte matemático como el que acabamos de presentar, cuya raíz es la Fórmula Integral de Cauchy.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) está considerado, junto a Gauss, como uno de los últimos genios universales (universalistas) que han marcado el desarrollo de las matemáticas a través de los tiempos. Es quizás el autor más prolífero después de Euler. Sus trabajos sobre teoría de funciones de una variable compleja fueron publicados en diferentes lugares sin ningún orden. El mismo resultado aparece varias veces, aunque frecuentemente, de alguna forma, modificado. Otras veces aparecían como breves resúmenes no fácilmente accesibles. Con frecuencia llenaba los Comptes Rendus Mathematique y el Journal de la École Polytechnique de Paris con gruesos trabajos que podían oscilar entre 80 y 300 páginas. Todo ello ha dado lugar a que no exista un claro orden cronológico de sus trabajos y que por tanto no sea fácil establecer, con exactitud, las fechas de algunas de sus resultados y más concretamente la fecha en la cual formula lo que hoy en día conocemos como Fórmula Integral de Cauchy para el disco. Lo que sí está claro es que entre los años 1814 y 1831, Cauchy establece los hechos básicos de la teoría que venimos comentando; en particular en la primera memoria de las dos que él presenta a la Academia de Turín en 1831, aparece la prueba más simple de su fórmula integral para el disco, cuyos precedentes se pueden encontrar en 1822-23, con motivo de la resolución de integrales en coordenadas polares y en su memoria de 1814, la cual fue publicada en 1827.

En su memoria de 1814, presentada en la Clase I del Instituto de Francia, aparece su definición de integral real de funciones reales entre límites reales, en una forma muy parecida en la que podemos encontrar hoy en día en cualquier texto elemental, es decir en términos de límite de sumas integrales, con la diferencia de que el valor de la función lo toma siempre en el extremo izquierdo del intervalo. Apartándose de los métodos utilizados en el siglo XVIII, donde la integración se trataba como la inversa de la derivación. No obstante, en dicha época se tenía un gran interés en el cálculo de integrales definidas sobre intervalos finitos donde el integrando podia poseer alguna discontinuidad (curvas discontinuas pueden determinar áreas bien definidas), y especialmente aquellas cuyo rango es infinito (lo que hoy solemos llamar integrales impropias), en cuyo caso no disponemos de funciones primitivas.

El concepto de Cauchy de integral como un límite de una suma, más idóneo que el de búsqueda de una primitiva, dio lugar a muchas fructíferas generalizaciones modernas de distintos conceptos de integral. El hecho de definir la integración independientemente de la diferenciación obligaba a Cauchy a probar la relación habitual entre la integración y la derivación, ello lo logró con la ayuda del Teorema del valor medio.

En la memoria de 1814 también aparecen los gérmenes de algunas de sus mayores contribuciones a la Teoría de funciones de una variable compleja. Por ejemplo, los resultados obtenidos en la Parte I pude ser considerados como equivalentes al llamado *Teorema de Cauchy* para el caso de integrales a lo largo de cuadriláteros.

Con todo ello Cauchy da pruebas, a los 25 años, de su gran talento como creador independiente. Contribuye de una forma extraordinaria al desarrollo del Análisis Complejo, razón por la cual está considerado como el padre de la Teoría de funciones de una variable compleja.

Como suele ser habitual ("de la nada no se puede sacar nada"), ciertas ideas que aparecen en la memoria de 1814, que venimos comentando, tienen como precedentes otras que se pueden encontrar en publicaciones de autores tales como: Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Euler, Pierre Simon Laplace (1749-1827), Legendre y Simeón Denis Poisson (1781-1840). El mismo Cauchy se encarga de reseñar esto en la introducción y anuncia su propósito en los siguientes términos:

"...*après avoir réfléchi sur cet objet, et rapproché les uns des autres les divers résultats ci-dessus mentionnés, j'ai conçu l'espoir d'établir le passage du réel á l'imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse; et mes recherches m'ont conduit á la métode qui fait l'objet de ce Mémoire*..."

(*después de haber reflexionado sobre este objeto, y acercado unos a otros los resultados diversos más arriba mencionados, concebí la esperanza de establecer el paso de lo real a lo imaginario sobre un análisis directo y riguroso; y mis búsquedas me condujeron al método que es objeto de este Informe*).

En el mes de Febrero de 1825, Cauchy comunicaba a la Academia de las Ciencias de París una memoria titulada: *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginanaires*. En Abril del mismo año publicaba un resumen de ella en el Bulletin de Férussac y la totalidad fue publicada como un folleto separado en Agosto (ver[58]). Esta memoria constituye un decisivo avance dado por Cauchy al desarrollo de la Teoría de funciones complejas de una variable compleja. Si en 1814 Cauchy presenta su teoría de integración de funciones reales sobre intervalos reales, ahora presenta la integración de funciones complejas entre límites complejos. Define la integración de una función a lo largo de un camino que une dos números complejos, como límite de sumas que se van aproximando. Inicialmente impone que las partes real e imaginaria, de la variable independiente, describan una función monótona a lo largo del camino; pero conforme avanza en el trabajo esta restricción desaparece (ver si acaso [26, pag. 250-1] y [58]). Aparecen también aquí las primeras formulaciones del Teorema de Cauchy y el Teorema de los residuos (restringido al desarrollo en serie de funciones racionales de funciones cuya única singularidades son polos aislados). Algunas ideas y "maquinaria" de las que aparecen en este último son atribuidas a Ostrogradskiĭ, ya que, aunque Cauchy trabajaba siempre prácticamente solo, por esta época realizó unas pocas colaboraciones con él.

El Teorema de Cauchy es un teorema fundamental el cual establece que la integral de una función holomorfa en un abierto a lo largo de una "conveniente" curva cerrada, contenida en dicho abierto, vale cero. Este *gran teorema*, como lo llamaba Gauss, fue descubierto por éste y se lo comunicaba a su amigo Bessel por medio de una carta en 1811. No se hizo público (más bien se ocultó) y esa es la causa por la que más tarde fuera redescubierto por Cauchy y después por Karl Theodor Wihelm Weierstrass (1815-1897).

En 1831 Cauchy presentaba dos importantes memorias en la Academia de Ciencias de Turín y en la primera de ellas, según hemos comentado, aparece la prueba más fácil de la Fórmula integral de Cauchy para el disco, así como la Fórmula de Taylor, las cuales presentaremos a continuación. En la segunda memoria presentada en Turín, aparece el Teorema de Cauchy así como el Teorema de los residuos, para el caso de dominios acotados por una curva simple cerrada (curva de Jordan).

Hemos de decir que Cauchy no compartía la visión geométrica de los números complejos. Él hablaba de "expresión imaginaria" y la definía, en 1821, como toda expresión simbólica de la forma $a + b\sqrt{-1}$ donde a, b representaban dos cantidades reales. Esta representación es algebraica. No estando satisfecho con la interpretación del número i , en 1847 (doce años después de la formulación de Hamilton), Cauchy introduce una definición que, en palabras de él mismo, hace possible reducir las expresiones imaginarias y la propia i a cantidades reales. Concretamente, utilizando el concepto de clase de equivalencia, él interpreta el cálculo entre números complejos como el cálculo entre polinomios reales módulo $x^2 + 1$. En terminología moderna si $\mathbb{R}[x]$ denota el anillo de los polinomios reales en una indeterminada x, entonces $\mathbb{C}$ puede ser identificado con el cuerpo cociente $\dfrac{\mathbb{R}[x]}{x^2+1}$ (ver si acaso [100, Ex. 29.4, pags. 267 y 271]). Por consiguiente Cauchy probó un caso particular del Teorema de Kronecker sobre extensiones finitas de cuerpos. Kronecker lo formuló en 1853 con algunas lagunas que después rellenaron Weber en 1886 y Hilbert en 1896 (ver [100, pag. 266]). Este último relato sobre la obra de Cauchy no es otra cosa que un ejemplo del espíritu perfeccionista de Cauchy y del rigor que introdujo en las matemáticas, algo no usual, que convertía sus complicadas pruebas originales en elegantes artículos posteriores, utilizando técnicas satisfactorias. Esto explica, como comentábamos anteriormente, la dificultad para fechar sus descubrimientos. A pesar de este esfuerzo nadie de su época, excepto Ostrogradskiĭ, se interesó por sus técnicas y resultados. El tiempo vendría a demostrar que había nacido una de las teorías mas bellas, y por tanto útiles, de las matemáticas. El lector interesado puede ver [265, 25, 26, 41], entre otros.

Ha llegado el momento de presentar otra de las grandes fórmulas, no solo de la variable compleja sino de las matemáticas. Recordemos que una aplicación continua γ de un intervalo cerrado $[a, b]$, de números reales, en $\mathbb{C}$ se dice que es un camino si existe una partición $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots\ldots \leq t_n = b$ del intervalo $[a, b]$, tal que la restricción de γ a cada una de los intervalos $[t_j, t_{j+1}],\ j = 0,\ j = 1, \ldots\ j = n-1$, es derivable con derivada continua. Si además f es una función continua sobre la imagen de γ, entonces se define la integral de f a lo largo de γ como:

$$\int_\gamma f(w)dw := \int_b^a Re\,[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt + i\int_b^a Im\,[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt.$$

La *Fórmula integral de Cauchy para el disco* establece que si Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, $\overline{D}$ es un disco cerrado contenido en Ω, γ es la frontera de $\overline{D}$ orientada positivamente, es decir recorremos γ en el sentido contrario a las agujas del reloj, y f es una función holomorfa en Ω, entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \text{ para todo } z \text{ en } D.$$

Hemos de decir que la fórmula sigue siendo cierta si suponemos que f es continua sobre γ y holomorfa en D.

Esta fórmula, de una belleza estética extraordinaria, lo que nos está diciendo es que si uno olvida los valores de f en el interior del disco $\overline{D}$, entonces, mediante la integración, puede recuperarlos a través del conocimiento de f en la frontera. Constituye la base sobre la cual se desarrolla lo que se conoce como *Teoría local de la variable compleja*, y por consiguiente son muchos los resultados que se deducen a partir de ella. Uno de ellos es que una tal función es indefinidamente derivable. Además se conocen las sucesivas derivadas n-ésimas, $f^{(n)}$, de f con tal de conocer ésta en la frontera. Concretamente, en las hipótesis que hemos establecido para la fórmula integral se tiene que:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \text{ para todo } z \in D \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si la fórmula de Cauchy para el disco nos permite conocer los valores de una función, f, holomorfa en un disco $D(z_0, r)$, de centro z_0 y radio r, conociendo sus valores en la frontera (donde se supone que f es continua), ahora vamos a obtener una especie de resultado dual, en el sentido de que el conocimiento de f y sus sucesivas derivadas en z_0, nos va a permitir conocer f en el mencionado disco. Más concretamente, el resultado conocido como *fórmula de Taylor de una función holomorfa en un disco* o simplemente *desarrollo de Taylor* afirma que: Si f es una función holomorfa en un disco $D(z_0, r)$, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \text{ para todo } z \text{ en } D(z_0, r).$$

Además la convergencia es absoluta y uniforme sobre los compactos contenidos en $D(z_0, r)$.

Hemos de resaltar que si tenemos una función holomorfa, f, en un abierto Ω y z_0 un punto de Ω entonces para conocer las derivadas $f^{(n)}(z_0)$ debemos conocer f en un entorno de z_0, lo que nos lleva a concluir, gracias a la fórmula anterior, que el conocimiento local de f en un punto, nos permite conocer f en todo un disco centrado en dicho punto con tal de que dicho disco esté contenido en Ω.

El desarrollo de Taylor también nos dice que si una función f es derivable en un disco entonces se puede expresar en él como la suma de una serie de funciones polinómicas, es decir f es límite de polinomios, por consiguiente si a partir de un término de la serie se suprimen todos los restantes lo que obtenemos es un polinomio que representa una aproximación de la función f.

Recordemos que una función real de variable real (resp. compleja) f se dice que es analítica en un punto a, si se puede representar como una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

con radio de convergencia no nulo. Además la convergencia es absoluta y uniforme en los compactos contenidos en el intervalo (resp. disco) de convergencia. Una tal función admite derivadas de cualquier orden y $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ para todo n mayor o igual a cero. Una serie de Taylor de una función real (resp. compleja) f definida en un intervalo abierto $(a-r, a+r)$, centrado en a (resp. en un disco abierto $D(a,r)$, con centro a) admitiendo derivadas de cualquier orden, se define como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si esta serie converge para todo x perteneciente al intervalo $(a-r, a+r)$ (resp. $D(a,r)$) y la suma es igual a $f(x)$, entonces f es analítica en a. En el caso de funciones complejas de variable compleja, los conceptos de función analítica en un punto y derivable u holomorfa en un entorno de dicho punto coinciden, algo que, como es bien conocido, no ocurre en el caso real.

La fórmula de Taylor para funciones holomorfas en un disco era presentada por Cauchy el once de octubre de 1831 en la Academia de Ciencias de Turín, donde él dio una conferencia acerca de un resumen, de su primera memoria de Turín, titulado: *Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul qui s'applique à un gran nombre de questions diverses.* La motivación venía dada por el hecho de que los métodos de cálculo utilizados por Laplace en su obra *Mècanique Cèleste,* se basaban en desarrollos en series cuya convergencia no era probada rigurosamente. Deficiencia que vino a corregir Cauchy y a partir de entonces el empleo de series infinitas se convirtió en una parte esencial de la teoría de las funciones tanto de variables reales como complejas. A este respecto conviene recordar, entre otras, que las funciones elementales complejas son las extensiones naturales holomorfas de las funciones elementales reales. Hacia el final de su vida, Cauchy se dio cuenta de la importancia del concepto de la convergencia uniforme, noción que ya era conocida por el físico G. G. Stokes (1819-1903), entre otros.

El problema de sumar una serie infinita para lograr un resultado finito se remonta a la época presocrática. Para Zenón de Elea, que vivió aproximadamente entre el 490 y 430 a. C., el problema era imposible y dio lugar a sus famosas paradojas (ver [40, pag. 180], [179, pag. 35. Vol. 1]). Aristóteles (384 a.C-322 a.C) , propuso resoluciones filosóficas a las paradojas de Zenón. Demócrito de Abdera (vivió aproximadamente 460-370 a.C) y más tarde Arquímedes, dieron contenido matemático a las mencionadas paradojas a través de lo que se conoce como método exhaustivo de Arquímedes; mediante el cual un número infinito de subdivisiones geométricas progresivas pueden alcanzar un resultado finito (ver [179, pag. 35-37. Vol. 1] y [40, pag. 114-16]). Un método similar era utilizado por Liu Hui (vivió en el siglo III) en su libro *Los nueve capítulos del arte matemático*, publicado en el año 263 (ver [41, pag. 180]).

En el siglo XIV en la Escuela de Kerala de Astronomía y Matemáticas, fundada por Madhava de Sangamagrama (1350-1425) (el cual es considerado como el padre del Análisis Matemático, por haber dado el paso decisivo desde los procedimientos finitos de los matemáticos antiguos, hacia el concepto de infinito a través del concepto de límite, núcleo del análisis moderno clásico) aparecieron los primeros ejemplos de series de Taylor (según consta en escritos posteriores de matemáticos hindúes) tales como los correspondientes a las funciones seno, coseno, tangente y arcotangente; los cuales se le atribuyen a Madhava.

James Gregory (1638-1675) en su obra *The Universal Part of Geometry*, publicada en 1668, presentó los desarrollos en serie de Taylor de diversas funciones tales como las funciones trigonométricas (en esencia también eran conocidas por Jean Bernoulli en una serie de cinco artículos publicados entre 1689 y 1704); adelantándose en cerca de cincuenta años a Brook Taylor (1685-1731) quien en sus *Methodos Incrementorun Directa et Invers*, publicada en
1715, presentó su famosa fórmula, para toda función real de variable real que sea desarrollable. Siguiendo así los pasos de su maestro Newton (entre otros) que había observado que muchas funciones no necesariamente polinómicas o trigonométricas, se podía expresar como series de potencias tales como:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ para todo } x \text{ de módulo menor que uno;}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ para todo } x \text{ de módulo menor que uno.}$$

La importancia de la fórmula de Taylor sólo fue reconocida cuando Joseph Louis Lagrange (1736-1813), en 1772, se dio cuenta de su gran valor y la definió como “el diferencial principal del fundamento del cálculo”.

Hemos de decir que previamente a Taylor, Colin Maclaurin (1698-1746), en su obra titulada *Treatise of Fluxions*, publicada el año 1742, introdujo lo que hoy conocemos como series de MacLaurin, las cuales no son otra cosa que un caso particular de los desarrollos de Taylor centrados en el cero. Además, las series de Maclaurin había aparecido doce años antes de que fueran publicadas por él, en un trabajo de James Stirling (1692-1770) titulado: *Methodus Differentialis*. Probablemente Taylor desconociera todos estos precedentes a su teorema, pero el hecho es que la, a veces caprichosa, Historia ha bautizado con el nombre de desarrollos de Taylor a los desarrollos en serie de potencias de "funciones apropiadas", exceptuando los mencionados desarrollos de Maclaurin (ver también [54]). Los desarrollos de Taylor tienen muchas aplicaciones tales como: Análisis de límites, resolución de límites indeterminados, estimación de números irracionales acotando su error, estudio de puntos estacionarios para funciones reales de variable real (máximos o mínimos relativos, puntos de silla), estimación de integrales, determinación de convergencia y suma de series, etc. Además son el fundamento matemático más importante para desarrollar métodos numéricos que buscan aproximar funciones por medio de polinomios y juegan un fundamental papel en el desarrollo de las calculadoras. Una vez más se cumple la máxima de que la matemática más bella es la más útil.

Cauchy en 1827 ya había descubierto la fórmula de las derivadas de una función holomorfa en términos de la integral a lo largo de una circunferencia, la cual hemos presentado anteriormente. Utilizando este resultado, en su primera memoria de Turín, también obtenía estimaciones para los términos del desarrollo en serie de Maclaurin de una función f holomorfa en un disco abierto $D(0,R)$ y para sus restos, una vez eliminados un número finito de términos. En particular él probó que, si notamos por

$$M_f(0,r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\} \text{ para todo } r \text{ tal que } 0 < r < R,$$

entonces:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M_f(0,r)}{r^n},$$

para todo entero no negativo n. Resultado que se extiende "mutatis mutandis" al caso de una función f holomorfa en un disco abierto $D(z_0,R)$, obteniendo:

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M_f(z_0,r)}{r^n},$$

para todo entero no negativo n. Desigualdades que hoy en día conocemos con el nombre de *desigualdades de Cauchy*. En particular si f es una función entera y acotada por una constante M, se tiene que, para $n=1$ y todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r},$$

para todo $r > 0$. Lo que nos lleva a poder afirmar que f posee derivada cero en $\mathbb{C}$ y por consiguiente ha de ser constante. Hemos obtenido pues el Teorema de Liouville. Este teorema se debe a Cauchy (Comp. Rend., nº 19, (1844) 1377-81), como el lector puede colegir después de lo expuesto anteriormente. Lo que ocurrió es que Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880) lo conoció en un curso impartido por Liouville en París en 1847 y se lo atribuyó a éste (ver [179, pag. 667. Vol. 2]).

A continuación vamos a presentar algunas otras obras de arte de la Teoría de funciones holomorfas. Recordemos que un subconjunto A de un espacio topológico Hausdorff (en particular $\mathbb{C}$) se dice que es *conexo* si se verifica que toda función continua de A en el conjunto de los números enteros es constante. Claramente la cualidad de ser conexo es una propiedad topológica y no es difícil probar que si A es un abierto de $\mathbb{C}$, entonces A es conexo si, y solo si dados dos puntos arbitrarios de A existe una poligonal, totalmente contenida en A, que une dichos puntos; es decir A es *poligonalmente conexo*.

Como ya hemos comentado anteriormente, la fórmula de Taylor para funciones holomorfas f en un abierto Ω nos permite trasladar el conocimiento local de f en un punto a todo un disco centrado en dicho punto con tal de que el mencionado disco esté contenido en Ω. En particular si z_0 es un punto de Ω tal que $f^{(n)}(z_0)$ es igual a cero para todo n en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, tendremos que f es idénticamente cero en un disco (abierto) D_0 contenido en Ω. Ahora si z_1 es un punto de D_0 podemos afirmar que la propiedad anterior, para f ,se extiende a D_0 unión con un disco D_1 contenido en Ω. Procediendo sucesivamente de esta manera cabe preguntarse por el final proceso, o dicho de otra forma: ¿es f igual a cero en Ω?. El Principio de Identidad nos dice que la respuesta es afirmativa si Ω es conexo. El mencionado principio lo podemos enunciar en los siguientes términos:

Sea Ω un abierto conexo (dominio) de $\mathbb{C}$, z_0 un punto de Ω y f una función holomorfa en Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $f^{(n)}(z_0)$ *es igual a cero para todo* n *en* $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) f *es idénticamente cero en un entorno de* z_0.

(c) z_0 *es un punto de acumulación de ceros de* f.

(d) f *es idénticamente cero en* Ω.

Entre las muchas consecuencias que se pueden obtener del resultado anterior me gustaría resaltar la siguiente. A tal efecto recordemos que un álgebra asociativa A se dice que es un *dominio de integridad* si siempre que ab es igual a cero, con a, b pertenecientes a A, entonces a o b ha de ser cero. Por otra parte el conjunto $H(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω es de forma natural un álgebra asociativa bajo las operaciones suma y producto puntuales, y producto por escalares. Pues bien podemos enunciar:

"$H(\Omega)$ *es un dominio de integridad si, y solo si* Ω *es conexo.*"

Un precioso resultado que pone en equivalencia una propiedad algebraica con otra topológica. El siguiente otro es de parecida naturaleza.

"*Sea* f *una función holomorfa en un abierto* Ω *y* z_0 *un punto en* Ω. *Entonces f es inyectiva en un entorno de* z_0 *si, y solo si,* $f'(z_0)$ *es distinto de cero. Además si se da alguna las dos condiciones anteriores entonces* $f'(z)$ *es distinto de cero en dicho entorno.*"

Con el objeto de presentar uno de los resultados cumbres de la teoría que venimos tratando, conocido con el nombre de *Teorema de Riemann de Representación Conforme*, necesitamos recordar el concepto de conjunto simplemente conexo el cual presentamos en los siguientes términos.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}$, diremos que B contenido en A es una *componente conexa* de A, si B es un subconjunto conexo maximal de A. Ya que claramente son conexos, tanto el conjunto formado por un solo punto, como la unión de conexos con intersección no vacía; se tiene que las componentes conexas de A no son otra cosa que la unión de conexos que contienen a un punto dado. Pues bien, diremos que un subconjunto A de $\mathbb{C}$ es *simplemente conexo* si el complementario de A en $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\backslash A$, carece de componentes conexas acotadas. Coloquialmente hablando: $\mathbb{C}\backslash A$ "carece de agujeros". Este concepto, al igual que el de conexión, son conceptos topológicos, y es fácil ver que ambos conceptos son independientes. Por ejemplo una corona es un conexo no simplemente conexo mientras que la unión de dos discos abiertos disjuntos es un simplemente conexo no conexo.

El Teorema de George Friedrich Benhard Riemann (1826-1866) de Representación Conforme afirma que:

Todo dominio, Ω, simplemente conexo de $\mathbb{C}$ o bien es $\mathbb{C}$ o existe una aplicación biyectiva y biholomorfa (tanto ella como su inversa son holomorfas) de Ω en el disco unidad. Además, fijado un punto z_o en Ω, la aplicación puede ser elegida de tal manera que aplique dicho punto en otro prefijado en el disco unidad.

Podemos decir por tanto que, desde el punto de vista de la holomorfía, solo existen dos abiertos conexos simplemente conexos en $\mathbb{C}$, a saber: el plano complejo y el disco unidad. Como un fácil corolario se obtiene que dados dos dominios propios simplemente conexos de $\mathbb{C}$, siempre existe una aplicación biyectiva y biholomorfa entre ellos, lo que nos permite, desde punto de vista práctico, trabajar en uno u otro según nos interese.

El teorema anterior era establecido por Riemann en la parte final de su tesis titulada: *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Bases para una teoría general de funciones de una variable compleja), sometida a la consideración de Gauss en 1851. Riemann utilizaba en su prueba el Principio de Dirichlet (en la teoría del potencial) y presentaba una laguna consistente en considerar que un cierto ínfimo debía de ser de hecho un mínimo. Muchos matemáticos intentaron eliminar el error y presentaron pruebas más convincentes. Entre ellos podemos citar a: Carl Gottfried Neumann (1832-1925), Herman Amandus Schwarz (1843-1921), Axel Harnach (1851-1888), Jules Henri Poincaré (1854-1912), etc. La primera prueba rigurosa fue presentada por Willian Fogg Osgood (1864-1934) en el año 1900. En este mismo año Hilbert también presentaba una prueba pero menos general que la de Osgood. En 1910 Paul Koebe (1882-1945) y Constantin Carathéodory (1873-1950) presentaron otra prueba convincente y asequible. La demostración que hoy en día es considerada como canónica se debe a Lipót Fejér (1880-1959) y a Frigyes Riesz (1880-1956). Su nuevo método está basado en la teoría de funciones y una de las herramientas clave, es el criterio de compacidad de Montel. (ver [48, 13, 295]).

El último resultado que presentamos sugiere que se puede obtener una prueba del Teorema de Riemann de Representación Conforme, desde el punto de vista del álgebra. En cualquier caso representa una pieza de arte matemático.

Sean Ω_1 *y* Ω_2 *dos dominios del plano complejo, entonces existe una aplicación biyectiva y biholomorfa entre* Ω_1 *y* Ω_2 *si, y solo si las correspondientes álgebras de funciones holomorfas* $H(\Omega_1)$ *y* $H(\Omega_2)$ *son isomorfas.* (ver [84, pag. 243-246]).

4 C*-álgebras

En este apartado vamos a abstraer propiedades de los números complejos que nos llevarán, de una forma natural, a presentar nuevos modelos matemáticos los cuales irrumpen en la literatura en los años cuarenta del pasado siglo, adquiriendo un gran protagonismo que se prolonga hasta nuestros días. De entre ellos destacaremos los conocidos con el nombre de *C*-álgebras*, donde el arte matemático resplandece de una forma extraordinaria. El volumen literario que existe sobre álgebras de Banach (en particular C*-álgebras) es inmenso y su influencia tanto en el Análisis Funcional como en otras áreas de las matemáticas y de la Física ha sido y sigue siendo decisiva. El lector puede consultar, entre otros, los siguientes textos [37, 29, 78, 79, 207, 82, 129, 237, 218, 219, 226, 252, 69, 12, 6, 43, 16, 17, 162, 159, 184].

Un *álgebra* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (igual a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{K}$ provisto de una aplicación bilineal $(a, b) \to ab$ del producto cartesiano de A por A en A, la cual es llamada el *producto* o la *multiplicación* de A. Se dice que A posee *unidad* si existe un elemento I en $\mathbb{A}$, distinto de cero (llamado la *unidad* de A) satisfaciendo: $Ia = aI = a$ para todo a en A. Un álgebra se dice que es *asociativa* (respectivamente *conmutativa*) si su producto es asociativo (respectivamente conmutativo). Un elemento a en un álgebra asociativa A con unidad se dice que es *inversible* si existe b en A tal que $ab = ba = I$. El elemento b es único y se suele notar como a^{-1}, al que llamaremos el *inverso* de a. Si todo elemento no cero de A es inversible se dice que A es un *álgebra de división*. Si A es un álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es un espacio normado verificando $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$, para cualesquiera a, b en A, diremos que A es un *álgebra normada* y si la norma es completa diremos que A es un *álgebra normada completa* si además A es asociativa diremos simplemente que A es un *álgebra de Banach*. Un álgebra normada con unidad de norma uno diremos que es un *álgebra normada unital*.

Nobert Wiener (1894-1964), en el año 1932, trabajando sobre los teoremas tauberianos (ver [300]) observa que se verifica la desigualdad fundamental: $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$, en el álgebra de las series de Fourier absolutamente convergentes (hoy conocida como el álgebra de Wiener), pero no realiza un estudio sistemático de tal estructura. El modelo matemático que hemos presentado como álgebras de Banach era introducido en 1936 por Mitio Nagumo (1905-?) y Kosaku Yosida (1909-1990) bajo el nombre de “anillos métricos” (ver [209, 307]). Israel Moiseevich Gelfand (1913-1981) en su trabajo del año 1939 (ver [116]) acuñó el término de “anillos normados”, nominación seguida por la escuela soviética hasta que años más tarde, en 1956 (ver también [119]), Mark Aronovich Naimark (1909-1978) empleó el nombre de “anillos de Banach” (ver [210, 211]). El actual nombre de álgebra de Banach fue empleado por primera vez por Warren Ambrose (1914-1995) en 1945, en su trabajo [7].

Hemos de recordar también que durante el periodo que va desde el año 1936 a 1943 von Neumann y Francis Joseph Murray (1911-1996) así como S. W. P. Steen (siglo XX) publican una serie de trabajos dedicados al estudio de anillos de operadores sobre espacios de Hilbert, con diferentes topologías y a la teoría axiomática de dichos operadores. Muchos de sus resultados eran abarcados por los trabajos de la escuela rusa, los cuales proporcionan el modelo apropiado para el estudio de la transformada de Fourier y el análisis armónico. En el trabajo de Steen, [270], publicado en 1940 aparece por primera vez el concepto de H^*-álgebra estudiado por Ambrose en su artículo anteriormente citado.

Recordemos algunos otros conceptos que nos van a facilitar una mejor comprensión en lo que sigue. Una aplicación biyectiva entre dos álgebras que conserva la estructura algebraica se dice que es un *isomorfismo*. También diremos que dichas álgebras son *isomorfas*. Si las álgebras son normadas y existe una aplicación lineal entre ellas que conserva la norma, diremos entonces que dicha aplicación es una *isometría* y si además la aplicación es biyectiva, diremos entonces que las álgebras son *isométricas*. Dos álgebras normadas isométricamente isomorfas son indistinguibles.

En 1878 Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) (ver [109] y [110]) establecía que no existen más algebras reales asociativas finito- dimensionales de división que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o el álgebra de los cuaternios reales. Este resultado era obtenido también, poco después, por Charles Sanders Pierce (1839-1914) (ver [93, pag. 65. Th. 2.31]), y extendido por Stanislaw Mazur (1905-1981) (ver [197]), en 1938, al caso de algebras infinito-dimensionales, estableciendo que:

Teorema de Mazur. *Toda álgebra real, asociativa, normada y de división es isomorfa a* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *(vista como real) o al álgebra de los* *cuaternios reales.*

En 1939 (ver [116]) Israel Moiseevich Gelfand anunciaba sin prueba el siguiente teorema, que él mismo llamó de Gelfand-Mazur, ya que también había sido anunciado por Mazur en el trabajo que hemos referido anteriormente. La prueba apareció publicada por Gelfand en 1941 (ver [117]).

Teorema de Gelfand- Mazur. *Toda algebra compleja, asociativa, normada y de división es isomorfa a* $\mathbb{C}$.

La prueba actual de ambos teoremas puede verse por ejemplo en ([237, pag. 38-40] o [37, pag. 71-74]). El isomorfismo natural que aparece en el Teorema de Gelfand-Mazur es isométrico, si el álgebra es unital. También se tiene que los mencionados teoremas son equivalentes (ver si acaso [31]) y constituyen uno de los primeros resultados fundamentales de la Teoría General de las álgebras de Banach. En una nota al pie de la página 18 del libro de Wieslaw Zelazko (1933-), (ver [311]), éste afirma que el manuscrito del trabajo ([197]) de Mazur contenía una prueba completa de ambos teoremas, pero al ser sometido a su publicación en la revista Comptes Rendues , los editores le pidieron que lo expresara de una forma más concisa ya que era demasiado voluminoso. Esta fue la razón que llevó a Mazur a suprimir las pruebas. Zelazko reproduce en [311, pag. 19-22] la prueba original de Mazur, la cual utiliza, entre otros el mencionado teorema de Frobenius y la versión del Teorema de Liouville para funciones armónicas.

Me gustaría resaltar que tanto uno como otro teorema siguen siendo ciertos si sustituimos la hipótesis de ser álgebras de división por el hecho de que la norma satisfaga: $\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$ para todo a, b en la correspondiente álgebra (ver [197, 117, 188]), e incluso basta con que exista una constante M satisfaciendo

$$\|a\|\,\|b\| \leq M\|ab\|$$

para todo a, b en la correspondiente álgebra. Así pues podemos enunciar la siguiente bella caracterización de los números complejos, entre las álgebras asociativas complejas normadas:

Toda álgebra asociativa compleja normada, A, cuya norma satisface $\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$ para todo a, b en A es isométricamente isomorfa a $\mathbb{C}$.

(ver si acaso [247, The. 10.19] y [311, Chapter I. 5]).

Me gustaría resaltar que los teoremas referidos pueden ser generalizados al caso de álgebras no necesariamente asociativas. En la monografía (en progreso) de Miguel Cabrera García (1956-) y Angel Rodríguez Palacios (1947-) (ver [49, Chapter 2, Sect. 5, 6 y 7]) aparece una información muy completa. A título de ejemplo citamos la siguiente extensión del resultado anterior. Para su mejor comprensión recordemos que un álgebra se dice ser de potencias asociativas, si la subálgebra engendrada por cualquiera de sus elementos es asociativa.

Toda álgebra compleja normada, A, de potencias asociativas (en particular asociativa) para la que existe una constante M satisfaciendo
$\|a\|\,\|b\| \leq M\|ab\|$ para todo a, b en A, es isomorfa a $\mathbb{C}$.

A nivel puramente algebraico es bien conocido cómo la abundancia de elementos inversibles repercute en el conocimiento del álgebra donde existe un concepto de elemento inversible. Así, por ejemplo, resulta un divertimento comprobar cómo si se nos olvida el producto en los números complejos, podemos recuperarlo a partir de la suma y del conocimiento de la aplicación que a cada número (no cero) le hace corresponder su inverso ($z^2 = z - (z^{-1} - (z-1)^{-1})^{-1}$). Sin embargo no cabe esperar que el mero conocimiento del conjunto de todos los elementos inversibles nos permita conocer el álgebra. Por ejemplo, si A es un álgebra asociativa, no conmutativa, con unidad y definimos un nuevo producto en A en la forma $a.b = ba$, obtenemos una nueva álgebra que posee los mismos elementos inversibles que A y sin embargo dichas álgebras no son isomorfas, y por tanto no identificables. Por consiguiente resulta de interés responder a la pregunta: ¿bajo qué condiciones el conocimiento de los elementos inversibles permite conocer el álgebra?. A esta cuestión responden los teoremas de Mazur y Gelfand-Mazur que hemos citado anteriormente.

A continuación presentamos algún otro resultado que, si bien no tiene la repercusión de los anteriores, representa una bella generalización local de ellos.

En 1951 Robert Edmund Edwards (1926-), (ver [88]), *caracterizaba los números reales, complejos o cuaternios reales, como aquellas álgebras, A, asociativas normadas reales con unidad satisfaciendo: $\|a\|\,\|a^{-1}\| = 1$, para todo elemento a inversible en A*. Este resultado mejora los de Mazur, anteriormente mencionados, para el caso de álgebras asociativas normadas cuya norma satisface la condición: $\|ab\| = \|a\| \, \|b\|$, para todo a, b; ya que esta implica que $\|a\| \, \|a^{-1}\| = 1$, para todo elemento a inversible, pero no al contrario. En 1979 Bernard Aupetit (1941-) probaba, ([16, Cor. 3.3]) (ver también [49, Chapter 3, Sect. 9]), que el resultado de Edwards sigue siendo cierto si se supone que la propiedad $\|a\| \, \|a^{-1}\| = 1$ es satisfecha por todo elemento a contenido en un subconjunto abierto formado por elementos inversibles en un álgebra normada con unidad. Notemos que si el álgebra es de Banach, entonces el conjunto de los elementos inversibles es abierto.

Consideremos ahora a los números complejos, vistos como un álgebra sobre sí mismos, y recordemos que la conjugación sobre $\mathbb{C}$ no es otra cosa que un automorfismo conjugado lineal ($\overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\,\overline{z}$) de cuadrado la identidad. Pues bien si A es un álgebra compleja, no necesariamente asociativa, entonces toda aplicación conjugado lineal, $*$, de A en A, de cuadrado la identidad, tal que $(ab)^* = b^*a^*$, para todo a, b en A, se dice que es una *involución* (o una *involución de álgebra*) sobre A y que A es una $*$*-álgebra* o un *álgebra con involución*. Así pues, una involución sobre A no es otra cosa que un antiautomorfismo conjugado lineal de cuadrado la identidad. Si A es un álgebra con involución $*$ y B es una subálgebra de A tal que para todo elemento b en B se verifica que b^* pertenece a B, diremos que B es una *subálgebra autoadjunta, invariante para la involución o* $*$*-subálgebra* de A. A los elementos a de A tales que $a^* = a$ se les conoce con el nombre de elementos *simétricos*.

Por otra parte la aplicación módulo, $|\ .\ |$, sobre los números complejos satisface la igualdad: $|\ z^*z\ | = |\ z\ |^2$ para todo z. Al igual que hemos hecho con la conjugación, esta otra propiedad también se axiomatiza, dando lugar de una forma natural al concepto de C*-álgebra, que algunos autores le añaden el apelativo de abstracta o simplemente hablan de B*-álgebra. El término de C*-álgebra era introducido por Irving Ezra Segal (1918-1998) en 1947 (ver [257]) para referirse a las álgebras que recogemos en el ejemplo (iv) a continuación.

Siguiendo la terminología de Jacques Dixmier (1924-), [79], una *C*-álgebra* es un álgebra de Banach compleja, A, dotada de una involución de álgebra, $*$, verificando $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo a en A. Esta última condición se conoce con el nombre de *Axioma de Gelfand-Naimark* o *propiedad estelar*.

Además de los números complejos, los siguientes ejemplos son C*-álgebras.

(i).- El espacio de Banach $C(\Omega)$ de todas las funciones continuas valuadas sobre los complejos y definidas sobre un espacio topológico compacto Hausdorff Ω (por ejemplo un disco cerrado en $\mathbb{C}$) dotado de la multiplicación puntual, involución $f^*(t) = \overline{f(t)}$ y la norma del supremo

$$\|f\| = \sup\{| f(t) | : t \in \Omega\},$$

es una C*-álgebra conmutativa.

(ii).- Al igual que $C(\Omega)$, el álgebra $C_0(\Omega)$ de todas las funciones continuas complejo valuadas sobre un espacio localmente compacto Hausdorff Ω (por ejemplo $\mathbb{C}$) que se anulan en el infinito (para cada real positivo ε, el conjunto $\{t \in \Omega : | f(t) | \geq \varepsilon\}$

es compacto), es también una C*-álgebra conmutativa sin unidad salvo que Ω sea compacto en cuyo caso $C_0(\Omega)$ es igual a $C(\Omega)$.

(iii).- Sea H un espacio de Hilbert complejo y notemos por $BL(H)$ el espacio de los operadores lineales y acotados sobre H, entonces dicho espacio dotado con el producto: la composición de operadores, involución: la usual adjunción de operadores y la norma de operadores definida por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \, : \, \|x\| \leq 1, \; x \in H\},$$

es una C*-álgebra.

(iv).- Toda subálgebra cerrada (para la topología de la norma) y autoadjunta de $BL(H)$, es claramente una C*-álgebra.

Recordemos que una aplicación lineal ϕ, entre álgebras con involución que conserve el producto y la involución ($\phi(a^*) = \phi(a)^*$) se dice que es un $*$-*homomorfismo*. Si además es biyectiva diremos que ϕ es un $*$-*isomorfismo*. Si añadimos que las álgebras sean normadas y ϕ conserva la norma diremos que ϕ es un $*$-*homomorfismo isométrico*. Si además es biyectiva diremos que ϕ es un $*$-*isomorfismo isométrico*. Dos álgebras entre las que existe un $*$-isomorfismo isométrico se dice que son isométricamente $*$-isomorfas. Es claro que dos álgebras isométricamente $*$-isomorfas son indistinguibles.

En un famoso artículo fechado en 1943, (ver [118] o [81]), Gelfand y Naimark prueban que, salvo $*$-isomorfismos isométricos, no existen mas C*-álgebras que las que acabamos de presentar (el caso conmutativo aparece ya en el artículo [116]). Concretamente ellos prueban los siguientes teoremas de representación:

Teorema conmutativo de Gelfand-Naimark. Sea A *un álgebra de Banach conmutativa, compleja con involución satisfaciendo* $\|a^*a\| = \|a^*\|\|a\|$ *para todo* a *en* A*. Entonces* A *es isométricamente* $*$*-isomorfa a* $C(\Omega)$*, si* A *posee unidad y a* $C_0(\Omega)$*, si el álgebra no posee unidad.*

Teorema no conmutativo de Gelfand-Naimark. Sea A *un álgebra de Banach compleja con unidad* I *e involución satisfaciendo:*

(1) $\|a^*a\| = \|a^*\|\|a\|$

(2) $\|a^*\| = \|a\|$

(3) $a^*a + I$ *es inversible*

para todo a *en* A*. Entonces* A *es isométricamente* $*$*-isomorfa a una* $*$*-subálgebra cerrada de* $BL(H)$*, para conveniente espacio de Hilbert complejo* H*.*

Claramente las propiedades *(1)* y *(2)*, en el teorema anterior, implican la propiedad estelar. Por otra parte, como ya observaban Gelfand y Naimark en su artículo; de la propiedad estelar junto a la desigualdad $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$, se sigue fácilmente *(2)* y *(1)*. Por consiguiente en los teoremas anteriormente enunciados podemos sustituir las propiedades *(1)* y *(2)* por la propiedad estelar. Respecto a la propiedad *(3)* hemos de decir que también es redundante (ver [129, Corollary 5.8]). Tal redundancia era probada implicitamente por Masanori Fukamilla (1912-?) en 1952 (ver [111, Lemma

4]), aunque fue Kaplansky el primero que hizo una elaborada versión de la prueba en 1959, basándose en el contenido del citado lema (ver [161, appendix]), el cual era también descubierto por John Leroy Kelley (1926-1999) y Robert Lawson Vaught (1926-2002) en 1953 (ver [173]).

Gelfand y Naimark también conjeturaron que las C*-algebras podían ser caracterizadas como aquellas álgebras de Banach complejas con involución satisfaciendo la propiedad *(1)*. Se emplearon casi veinticinco año en dar una respuesta afirmativa a dicha conjetura y ello se debe principalmente a los trabajos: [213] y [214] de Tamio Ono (siglo XX-?), [123] de James Gibert Glimm (1934,)-Richard V. Kadison (1925-) y [293] de B. J. Vowden (siglo XX-?). Finalmente en 1973 Huzihiro Araki (1932,) y George A. Elliott(1945-) probaron que la submultiplicatividad de la norma ($\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$) se puede deducir de la propiedad estelar, (ver [11]). En consecuencia, una C*-álgebra nos es otra cosa que un álgebra asociativa compleja con involución, cuyo espacio vectorial subyacente es un espacio de Banach satisfaciendo la propiedad estelar. El lector interesado en ampliar la información puede acudir a [82]. Hoy en día, los mencionados teoremas se suelen enunciar en los siguientes términos:

Teorema conmutativo de Gelfand-Naimark. *Toda C*-álgebra conmutativa es $*$-isomorfa e isométrica a un $C(\Omega)$, si posee unidad y a $C_0(\Omega)$, si el álgebra no posee unidad.*

Teorema no conmutativo de Gelfand-Naimark. *Toda C*-álgebra es $*$-isomorfa e isométrica a una $*$-subálgebra cerrada del álgebra* *de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert.*

En particular este último teorema nos dice que todo $C(\Omega)$ o $C_0(\Omega)$ puede verse como una $*$-subálgebra cerrada de un $BL(H)$. La prueba de los mencionados teoremas puede verse, entre otros, en [37, 79, 82, 207].

La prueba del Teorema conmutativo tiene su base en la Teoría de Representación de Gelfand para álgebras de Banach complejas conmutativas, que el mencionado autor presentó en 1941, [117]. El teorema fundamental de representación establece que una tal álgebra A puede ser representada mediante un homomorfismo, conocido como el *homomorfismo de Gelfand*, en un álgebra de funciones $C_0(\Omega_A)$ ($C(\Omega_A)$ si A posee unidad); donde Ω_A es el conjunto de los homomorfismos no nulos de A en $\mathbb{C}$ dotado de una conveniente topología, conocida como la topología de Gelfand, que lo convierte en un espacio Hausdorff localmente compacto (compacto si A posee unidad) (ver [159, Section 2.2]). A Ω_A se le conoce con el nombre del *espacio de caracteres del álgebra*, el cual es siempre no vacío si A posee unidad (ver [159, Theorem 2.1.8]).

Queremos hacer notar que el espacio de caracteres de $C_0(\Omega)$ (respectivamente $C(\Omega)$) es *homeomorfo* (existe una aplicación biyectiva y bicontinua) a Ω, lo cual los hace indistinguibles (ver [181, Theorem 4.1.1]). Por otra parte *el homomorfismo de Gelfand es un $*$-isomorfismo isométrico si, y solo si A es una C*-álgebra conmutativa* (ver [159, Theorem 2.4.5]).

Los teoremas de Gelfand-Naimark son uno de los hechos más notables de la Teoría de las C*-álgebras pues, no solamente nos dicen hacia que C*-álgebras debemos dirigirnos en el estudio de tales modelos, sino que marcan un antes y un después en el desarrollo de la Matemática. Una forma de interpretar el Teorema conmutativo es que es posible establecer una correspondencia biyectiva entre los espacios topológicos compactos (respectivamente localmente compactos) Hausdorff y las C*-álgebras conmutativas con unidad (respectivamente sin unidad). En esta correspondencia lo deseable es que espacios topológicos matemáticamente indistinguibles vayan a parar a álgebras indistinguibles y recíprocamente. También sería deseable que cualidades topológicas de los espacios topológicos repercutieran en cualidades de las álgebras y a la inversa. De ello dan información los próximos resultados. El primero de ellos que presentamos se conoce en la literatura como Teorema de Banach-Stone, ya que fue descubierto por dichos autores en 1932-1937 (ver [19, 273]).

Teorema 1.*Sean Ω_1 y Ω_2 dos espacios topológicos Hausdorff compactos (respectivamente localmente compactos) las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $C(\Omega_1)$ *(respectivamente* $C_0(\Omega_1)$ *es isométricamente isomorfo a* $C(\Omega_2)$ *(respectivamente* $C_0(\Omega_2)$*)*

(b) $C(\Omega_1)$ *(respectivamente* $C_0(\Omega_1)$*)es isomorfo a* $C(\Omega_2)$ *(respectivamente* $C_0(\Omega_2)$*)*

(c) Ω_1 *y* Ω_2 *son homeomorfos, es decir existe una aplicación biyectiva y bicontinua entre* Ω_1 *y* Ω_2.

Además cada aplicación lineal sobreyectiva e isométrica T *de* $C(\Omega_1)$ *sobre* $C(\Omega_2)$ *es de la forma:* $Tf = a.(f \circ h)$*, donde* h *es un homeomorfismo de* Ω_2 *en* Ω_1 *y* a *es una función escalar continua de módulo igual a uno.* (ver [159, Section 2.2] o [181, Section 4.1] o [114]). En particular, ya que todo espacio topológico compacto (respectivamente localmente compacto) Hausdorff, Ω, es homeomorfo al espacio de los caracteres de $C(\Omega)$, $\Omega_{C(\Omega)}$, (respectivamente $\Omega_{C_0(\Omega)}$)), se tiene que $C(\Omega)$ (respectivamente $C_0(\Omega)$) es isométricamente isomorfo a $C(\Omega_{C(\Omega)})$ (respectivamente $C(\Omega_{C_0(\Omega)})$.

El Teorema anterior se extiende al caso de C*-álgebras conmutativas en los siguientes términos.

Teorema 2. *Sean* A*,* B *dos C*-álgebras conmutativas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Existe un $*$*-isomorfismo isométrico entre* A *y* B.

(b) Existe un isomorfismo entre A *y* B.

(c) El espacio de caracteres de A *es homeomorfo al espacio de caracteres de* B.

(ver [159, Corollary 2.4.6]).

Teniendo en cuenta que el hecho de ser homeomorfos es una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios topológicos Hausdorff compactos (respectivamente localmente compactos), y que igual podemos decir acerca de la propiedad de ser isomorfas en el conjunto de las álgebras asociativas conmutativas; estamos en condiciones de poder enunciar:

Existe una biyección entre las clases de los espacios topológicos Hausdorff compactos (respectivamente localmente compactos) y las clases de las C-álgebras conmutativas con unidad (respectivamente sin unidad) isomorfas.*

Recordemos que un elemento e de un álgebra se dice que es *idempotente* si $ee = e$. La unidad de un álgebra siempre es un idempotente no cero. Es fácil de probar que si Ω es un espacio topológico compacto Hausdorff conexo, entonces $C(\Omega)$ no posee mas idempotentes, distintos de cero, que la unidad. Por consiguiente si queremos que $C(\Omega)$ posea otros idempotentes, no cero, hemos de considerar que Ω tenga algún grado de desconexión. Un espacio topológico Hausdorff se dice que es *totalmente disconexo* si no contiene otros subconjuntos conexos que los formados por un solo elemento. Nuestra siguiente afirmación era probada en [287, Proposición 2.5]), siguiendo ideas de [18] y [85]).

Sea Ω un espacio topológico compacto Hausdorff, entonces Ω es totalmente disconexo si, y solo si, $C(\Omega)$ es el cierre del subespacio generado por el conjunto de sus idempotentes, es decir todo elemento de $C(\Omega)$ es límite de una sucesión cuyos elementos son combinaciones lineales de idempotentes.

El lector pude deducir el siguiente otro:

Sea A una C-álgebra conmutativa con unidad, entonces el espacio de caracteres de A es totalmente disconexo si, y solo si, A es el cierre del subespacio generado por el conjunto de sus idempotentes.*

Si aumentamos el grado de desconexión de Ω obtenemos el siguiente resultado. A tal efecto es conveniente recordar que un espacio topológico Hausdorff se dice que es *estoneano o extremadamente disconexo* si el cierre de cada uno de sus abiertos es un abierto de dicho espacio. Todo espacio extremadamente disconexo es totalmente disconexo. El recíproco no es cierto en general (ver [156, pag. 222]). Por otra parte un elemento idempotente, e, de una C*-álgebra se dice que es una *proyección* si $e^* = e$.

Sea Ω un espacio topológico compacto Hausdorff estoneano, entonces todo elemento de $C(\Omega)$ es límite de una sucesión cuyos elementos son combinaciones lineales de proyecciones.

La prueba puede verse en [252, Proposition 1. 3. 1]. El lector interesado puede encontrar en la página seis de [252] y en [274], una condición necesaria y suficiente sobre los elementos de $C(\Omega)$ para que Ω sea estoneano.

En la teoría de álgebras existen dos procesos muy útiles conocidos con los nombres de *unitización* y *complexificacón.* El primero de ellos permite adjuntar a un álgebra A, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (en nuestro caso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), una unidad. A tal efecto se considera el espacio vectorial producto de A por $\mathbb{K}$ y se define el producto:

$$(a, \alpha)(b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta),$$

para todo a, b en A y α, β en $\mathbb{K}$. Es fácil ver que $I := (0, 1)$ es una unidad para tal álgebra, a la que notaremos por A_I y a sus elementos por $(a, \alpha) := a + \alpha I$. Si A es un álgebra normada entonces la fórmula $\|(a, \alpha)\|) = \|a\| + \mid \alpha \mid$, determina una norma en A_I que la convierte en un álgebra con unidad de norma igual a uno. A puede verse como un ideal cerrado de A_I mediante el homomorfismo isométrico que lleva a en $(a, 0)$. Además A es completa si, y solo si, también lo es A_I. Hemos de reseñar también que si A es una C*-álgebra entonces su unitización es de nuevo una C*-álgebra definiendo la involución en A_I de una forma natural, a saber: $(a + \alpha I)^* := a^* + \bar{\alpha} I)$.

La parte algebraica del proceso de complexificación se obtiene de una forma análoga a como obteníamos los números complejo a partir de los reales. De manera que si A es un álgebra real, entonces el espacio vectorial producto cartesiano de A por A es un álgebra compleja, que notaremos por $A_{\mathbb{C}}$, definiendo el producto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, para todo a, b, c, d en A. De esta manera la aplicación de A en $A_{\mathbb{C}}$ que lleva a en $(a, 0)$ es un $\mathbb{R}$-homomorfismo inyectivo y A puede verse como una subálgebra real del álgebra compleja $A_{\mathbb{C}}$. Si el álgebra A es un álgebra normada entonces a su complexificación se le puede dotar de estructura de álgebra normada de forma que el homomorfismo anterior es isométrico. La norma sobre $A_{\mathbb{C}}$ es una extensión de la norma en A $((\|a\| = \|(a, 0)\|))$ y si A es completa, también lo es $A_{\mathbb{C}}$.

Dada un álgebra A, asociativa, compleja con unidad I, se define el *espectro* de a, para cada a en A como el conjunto de los números complejos λ tales que $a - \lambda I$ no pertenece al conjunto de los elementos inversibles en A, y que notaremos por $Sp(a, A)$, o simplemente $Sp(a)$, cuando no haya confusión respecto al álgebra a que nos estamos refiriendo . Si A es normada, el espectro así definido es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y además compacto, en el caso de que A sea completa. En este punto queremos hacer notar al lector que el teorema de Gelfand-Mazur es una consecuencia inmediata de la no vaciedad del espectro de cualquier elemento.

Si el álgebra asociativa normada compleja A no posee unidad, se define el espectro de un elemento como el espectro en su unitización: $Sp(a, A) := Sp(a, A_I)$.

El concepto de espectro que acabamos de introducir es puramente algebraico y la definición "tiene sentido" para álgebras reales. Sin embargo no es de utilidad en este caso, pues incluso puede ser vacío (por ejemplo considérese $\mathbb{C}$, vista como álgebra real, y tómese a igual al número i). El problema se soluciona acudiendo a la complexificación. Sea pues A un álgebra real asociativa con unidad y a un elemento de A, se define el espectro de a relativo a A, como el espectro de a relativo a $A_{\mathbb{C}}$: $Sp(a, A) := Sp(a, A_{\mathbb{C}})$.

En consecuencia, mediante paso a complexificación y/o unitización, si fuese necesario tenemos definido el concepto de espectro de un elemento de un álgebra asociativa normada, una de las nociones más importantes en la Teoría de las álgebras de Banach, básica en la Teoría de Representación de Gelfand. A través del conocimiento del espectro de un elemento podemos obtener muy buena información de dicho elemento (recordar la diagonalización de matrices).

Existe un procedimiento que permite expresar el concepto de espectro de un elemento sin acudir a la unitización o complexificación. A tal efecto se introduce una nueva operación, en un álgebra dada A (asociativa), conocida con el nombre de *casi-producto*, notada por o y definida como: $aob = a+b-ab$ para todo a, b en A. Esta operación es asociativa y tiene al cero por unidad (aunque no es bilineal). Por consiguiente, bajo esta nueva operación A es un semigrupo cuyos elementos inversibles son conocidos con el nombre de los elementos *casi-inversibles* (o *casi-regulares*) del álgebra A y los notaremos por q-$Inv(A)$. Si a es casi-inversible y b es su inverso respecto al casi-producto, diremos que b es el *casi-inverso de* a. Si el álgebra posee unidad I, la relación entre el producto del álgebra y el casi-producto viene dada por la igualdad: $(I-a)(I-b)$ = $I-aob$ para todo a, b en A. En consecuencia podemos enunciar:

Sea A un álgebra asociativa, entonces:

(a) Si A posee unidad I, entonces a perteneciente a A es casi-inversible y b es su casi-inverso si, y solo si, $I-a$ es inversible en A con inverso $I-b$.

(b) a es casi-inversible en A y b es su casi-inverso si, y solo si, $(0,1)-(a,0)$ es inversible en A con inverso $(0,1)-(b,0)$, en la unitización de A.

(c) El conjunto de los elementos casi-inversibles en A coincide con el conjunto de los casi-inversibles en la unitización de A.

Supongamos que A es un álgebra asociativa compleja normada sin unidad. Ya que A es un ideal propio de su unitización, A_I, se sigue que A carece de elementos inversibles en A_I y por consiguiente cero pertenece al espectro de todo elemento de A. Por otra parte si A posee unidad, I, entonces $a-\lambda I$ no es inversible si, y solo si, $\frac{a}{\lambda}$ no es casi-inversible. Por consiguiente se tiene que:

$$Sp(a,A)\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \frac{a}{\lambda} \notin \text{q-Inv(A)}\};$$

independiente de que A tenga o no unidad, gracias al apartado *(c)* anterior, con la precaución de añadir cero si a no es inversible. Lo que nos da una caracterización del espectro en términos del álgebra A para el caso sin unidad. Nuestro siguiente resultado caracteriza el espectro de un elemento de un álgebra real en términos intrínsecos del álgebra. *Sea a un elemento de un álgebra normada real A, entonces:*

(a) *Cero pertenece al espectro de a si, y solo si, A no posee unidad o bien A tiene unidad y a no es inversible.*

(b) *Si z es un número complejo distinto de cero, entonces z pertenece al espectro de a si, y solo si, el $|z|^{-2}(2(Re\, z)a - a^2)$ no pertenece al conjunto de los elementos casi-inversibles de A.*

Esta caracterización se debe a Kaplansky (ver[160] y [237, Theorem 1.6.6]). En el caso de álgebras de Banach complejas conmutativas el espectro de un elemento puede ser obtenido a partir del conocimiento del espacio de caracteres, concretamente: *Sea a un elemento de un álgebra de Banach compleja conmutativa A y Ω_A su espacio de caracteres entonces:*

(a) $Sp(a, A) = \{\phi(a) \,:\, \phi \in \Omega_A\}$*, si A posee unidad;*

(b) $Sp(a, A) \setminus \{0\} = \{\phi(a) \,:\, \phi \in \Omega_A\} \setminus \{0\}$*, si A no posee unidad.*

(ver [37, Theorems 4, 5 pag. 82-83]).

Dada un álgebra asociativa normada A, se tiene que, para todo a perteneciente a A, la sucesión $\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ es convergente y tiene como límite al número $\text{ínf}\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$, al cual lo notaremos por $r(a)$ y se le conoce con el nombre del *radio espectral* de a. Es claro que el radio espectral de un elemento no depende de la norma de álgebra elegida en A con tal de que sea equivalente a la de partida. También es claro que el radio espectral de un elemento permanece invariante por paso a la complexificación o unitización, así como que el radio espectral de un elemento es menor o igual que la norma de dicho elemento. Si añadimos que A sea conmutativa se tiene que el radio espectral es subaditivo y submultiplicativo, es decir: $r(a+b) \leq r(a)+r(b)$ y $r(ab) \leq r(a)r(b)$, para todo a, b en A (ver [37, Corollary 5.3]).

El siguiente bello y útil resultado, conocido en la literatura por *Fórmula de Gelfand-Beurling*, nos permite conocer el radio espectral de un elemento de un álgebra de Banach a partir del conocimiento del espectro de dicho elemento, es decir, a partir del conocimiento de la estructura algebraica.

Para cada elemento a perteneciente a un álgebra de Banach se verifica que el radio espectral de a coincide con el máximo del módulo de los números en el espectro de a

$$r(a) = \text{máx}\{\mid \lambda \mid : \; \lambda \in Sp(a)\}.$$

La teoría que acabamos de presentar es básica y puede seguirse por cualquier monografía dedicada a las álgebras de Banach. Nosotros recomendamos [37] y [237].

Un ideal izquierdo J de un álgebra asociativa A se dice que es un *ideal izquierdo modular* si existe un elemento u, *unidad modular derecha*, en A tal que $au - a$ pertenece a J para todo elemento a perteneciente a A (análogas definiciones se dan para ideales derechos o biláteros). Si A posee unidad, ésta es unidad modular. Con ayuda del Lema de Zorn se sigue fácilmente que todo ideal izquierdo modular propio está contenido en un ideal izquierdo modular maximal (no existe otro ideal del mismo tipo que lo contenga). Los ideales izquierdos modulares maximales de un álgebra de Banach son cerrados.

En 1945, [151], Nathan Jacobson (1910-1999) introduce el concepto del *radical* de un álgebra asociativa A, conocido como el *radical de Jacobson* (ver también [37, Definition 24.13]), al que notaremos por *Rad(A)*, el cual agrupa a los elementos "malos" del álgebra en cuestión. Gracias a [37, Proposition 24.14], el radical de A se puede definir, de forma equivalente, como la intersección de todos los ideales izquierdos modulares maximales. Un álgebra se dice que es un *álgebra de radical* si carece de ideales izquierdos modulares maximales propios (distintos de cero y A), en cuyo caso se define el radical como la totalidad del álgebra. Se dice que A es *semisimple* si su radical se reduce al cero. Si A es un álgebra de Banach entonces su radical es cerrado y el álgebra de Banach cociente, $A/Rad(A)$ es semisimple. Si además A es conmutativa entonces, gracias a que existe una aplicación biyectiva entre los caracteres del álgebra y los ideales maximales modulares (ver [159, Theorem 2.1.8]), se tiene que el radical de una tal álgebra es la intersección de los núcleos de sus caracteres.

El siguiente resultado, que el lector puede seguir a través de [37, Sección 17], caracteriza el radical de un álgebra de Banach conmutativa A en términos del radio espectral:

Sea A un álgebra de Banach conmutativa y a un elemento A. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) a *pertenece al radical.*

(b) $\varphi(a)$ *es cero para todo* φ *perteneciente al espacio de caracteres de* A.

(c) El espectro de a *es cero.*

(d) El radio espectral de a *es cero.*

Una consecuencia inmediata de este resultado es que *un álgebra de Banach conmutativa, A, es semisimple si, y solo si, para cada a en A, el radio espectral de a es cero implica que a es cero*. Ya que el radio espectral es subaditivo y submultiplicativo, ello equivale a que el radio espectral sea una norma de álgebra sobre A.

Es claro que un elemento casi-inversible de un álgebra de Banach posee radio espectral cero. Por otra parte, si A es un álgebra asociativa, entonces su radical está contenido en el conjunto de los elementos casi-inversibles (ver [37, Proposition 24.16]). De hecho $Rad(A)$ es el más grande ideal izquierdo de A contenido en q-$Inv(A)$, (ver [37, Corollary 24.18] o [237, Theorem 2.3.2]). En consecuencia tenemos que todo elemento del radical de un álgebra de Banach posee radio espectral cero. El recíproco no es en general cierto (salvo conmutatividad), de ahí el interés y acierto de la siguiente caracterización la cual resulta ser una de las mas útiles:

Sea A un álgebra de Banach, entonces:

$$\begin{aligned} Rad(A) &= \{a \in A : r(ab) = 0 \textit{ para todo } b \in A\} \\ &= \{a \in A : r(ba) = 0 \textit{ para todo } b \in A\} \end{aligned}$$

(ver [37, Proposition 25.1]).

Es bien conocido (ver si acaso [27], [76]) que todas las normas sobre un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, y por consiguiente la estructura algebraica determina la topología que induce la norma. Esta propiedad deja de ser cierta para espacios normados completos (*espacios de Banach*) de dimensión infinita ya que en tal caso siempre es posible encontrar una norma completa sobre dicho espacio no equivalente a la de partida. En otras palabras, salvo dimensión finita, la topología de la norma (completa) no es única a nivel de espacios de Banach en general. Por otra parte en apartado primero, dedicado a la Fundamentación de las matemáticas, recordábamos el Teorema de Gelfand-Šilov-Kaplansky-Rickart, el cual nos decía que la estructura topológica de $C(\Omega)$, como álgebra de Banach, era determinada por la estructura algebraica. Propiedad que se conoce como *unicidad de la topología de la norma completa.* Es obvio que no cabe esperar que esta propiedad sea cierta para cualquier álgebra de Banach, ya que todo espacio de Banach puede considerarse como un álgebra con producto cero. Resulta pues natural la búsqueda de condiciones de tipo algebraico que aseguren que, si dos normas sobre un álgebra asociativa dotan a ésta de estructura de álgebras de Banach, entonces necesariamente han de ser equivalentes. Este es un problema que aun hoy en día permanece abierto y probablemente sea uno de los más apasionantes de la teoría general de las álgebras de Banach. Nuestro próximo objetivo es presentar que el problema tiene solución para el caso de álgebras de Banach semisimples.

La unicidad de la topología de la norma completa para álgebras de Banach conmutativas semisimples es relativamente fácil y originariamente se debe a Gelfand, [117]. La prueba se basa en las propiedades de que el radio espectral es un invariante algebraico respecto a normas equivalentes y es subaditivo, unido a la caracterización de la semisimplicidad, que hemos visto anteriormente, y al Teorema de la Gráfica Cerrada (ver [247, pag. 51]). En este momento no nos resistimos a dar la prueba, aunque sea esquemáticamente. En efecto, si A es una tal álgebra, $\|.\|_1$ es cualquier otra norma de álgebra completa sobre A y $\|.\|$ es la norma original en A, bastara probar que la aplicación identidad de $(A, \|.\|)$ en $(A, \|.\|_1)$ es continua, para ello es suficiente (gracias al Teorema de la Gráfica Cerrada) probar que si a_n es una sucesión en A tal que $\|a_n\|$ y $\|a_n - a\|_1$ convergen a cero, entonces a es igual a cero. Ello se sigue de:

$$r(a) \leq r(a - a_n) + r(a_n) \leq \|a_n - a\|_1 + \|a_n\|.$$

El lector interesado puede consultar también [181, Corollary 5.3.1] o [159, Corollary 2.1.11].

La prueba de la *unicidad de la norma* (unicidad de la topología de la norma completa) para álgebras de Banach semisimples no conmutativas es bastante más complicada. En 1950, (ver [236]), Rickart planteaba el problema y daba una solución (parcial) para álgebras de Banach tales que la intersección de todos los ideales modulares maximales se reduce a cero. Un año mas tarde John David Newburgh (siglo XX-?), (ver [212]), daba también una prueba bajo la hipótesis de la continuidad del radio espectral. El problema era definitivamente resuelto casi veinte años después (1969) por Barry Edward Johnson (1937-2002) (ver [153]).

La prueba de Johnson utiliza la teoría de representaciones irreducibles de álgebras de Banach, y dado que el problema puede ser reducido al caso de álgebras primitivas, como ya había puesto de manifiesto Rickart en 1950 (ver también [237, Chapter 2 & 5]), él demuestra que toda álgebra de Banach primitiva posee la propie-dad de la unicidad de la topología de la norma completa (ver también [37, Theorem 25.9] para la prueba).

En 1982 Aupetit obtenía una nueva e independiente prueba, basada en un importante resultado de Edoardo Vesentine (1928-) (ver [288] o [17, Theorem 3.4.7]), el cual afirma que si f es una función holomorfa de un dominio del plano complejo con valores en un álgebra de Banach compleja, entonces la composición de f con el radio espectral ($z \to r(f(z))$) es una función subarmónica. La demostración de Aupetit elude la teoría de representación y utiliza como principal idea (en palabras del propio autor) la propiedad de que el radio espectral es independiente de la norma completa. Concretamente Aupetit establece en [15] el siguiente teorema del cual se deduce (pasando a complexificación, si fuese necesario, y tomando como ϕ la aplicación identidad) (ver si acaso [49, Theorem 4.4.43]) el Teorema de Johnson de la unicidad de la norma completa.

Sean A, B dos álgebras de Banach complejas siendo B semisimple y sea ϕ una aplicación lineal de A en B satisfaciendo que el radio espectral de $\phi(a)$ es menor o igual al radio espectral de a para todo a en A, entonces ϕ es continua.

Siguiendo la línea marcada por Aupetit, Thomas J. Ransford (1954-) presentaba en 1989, en nuestra opinión, la prueba más elegante y corta del teorema que venimos comentando. Él utiliza, como únicas herramientas, el concepto de radio espectral, la caracterización del radical en términos del radio espectral, que hemos presentado anteriormente, y una versión del Teorema de los tres círculos de Hadamard para el radio espectral (ver [233], [234, Section 6.4] y [66, pag. 133-137]), el cual viene a reemplazar la subarmonicidad empleada por Aupetit. Ransford establece el siguiente teorema, debido a Johnson, que muestra cómo propiedades conjuntistas-algebraicas sobre una aplicación implican una propiedad topológica de la misma.

Sean A, B dos álgebras de Banach y supongamos que B es semisimple, entonces todo homomorfismo sobreyectivo de A en B es automáticamente continuo.

Recordemos que un álgebra J (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) se dice que es un *álgebra de Jordan* si es conmutativa y satisface la siguiente identidad, conocida como *identidad de Jordan*:

$$a^2(ab) = a(a^2b) \text{ para todo } a, b \text{ en } J.$$

Si A es un álgebra asociativa y cambiamos su producto por el siguiente: $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ para todo a, b en A, entonces A se convierte en un álgebra de Jordan que se suele notar como A^+ y se le conoce con el nombre del *álgebra simetrizada* de A. Al nuevo producto, $\circ$, se le conoce como el *simetrizado* del original en A. Las subálgebras (de Jordan) de A^+, o isomorfas a estas, son conocidas como álgebras de *Jordan especiales*. Si un álgebra de Jordan no es especial se dice que es *excepcional* ([312, Section 3.1], [3]).

El lector interesado en dichas álgebras puede consultar las monografías de Jacobson y Kevin Mor McCrimmon (1941-), [152]) y [202] respectivamente. En [147] aparece también una amplia información sobre sus aplicaciones.

El nombre de álgebras de Jordan se debe a Abraham Adrian Albert (1905-1972) quien así lo hizo en 1946 en honor al físico Ernest Pascual Jordan (1902-1980) el cual las introdujo en 1932-1933, como un intento de crear un álgebra infinito-dimensional de observables para la Mecánica Cuántica, diferente del álgebra de las matrices simétricas (ver [42, Introduction], [154, Introduction], [202, Part I.1] y [258]).

Hemos de resaltar que las técnicas de Aupetit pueden ser aplicadas a álgebras normadas completas donde no es aplicable la teoría de representación de Johnson, como es el caso de las algebras de Jordan, dando lugar a una revolución de la teoría de las álgebras de Jordan normadas completas, conocidas con el nombre de álgebras de *Jordan-Banach*. En la teoría de álgebras de Jordan no existen representaciones irreducibles o cocientes por ideales izquierdos modulares maximales, pero los conceptos de casi-inversible y casi-inverso se trasladan sin ninguna dificultad. Concretamente McCrimmon prueba que, dada un álgebra de Jordan, J, existe un más grande ideal casi-inversible conocido como el radical de McCrimmon o radical de Jacobson de J. Se dice que J es *simisimple* si el mencionado ideal se reduce a cero (ver [200], [201], [202]). Aupetit presenta en [15] la unicidad de la topología de la norma completa para el caso de álgebras de Jordan-Banach semisimples. De hecho las técnicas de Aupetit, que el lector puede disfrutar a través de la lectura de sus libros [16] y [17], consisten en seguir profundizando en el empleo del Análisis Complejo en la Teoría de las álgebras de Banach lo que le permite, no solamente presentar una nueva, simple y bonita visión de una gran parte de la mencionada Teoría, sino también trasladar la misma al contexto de otras álgebras normadas completas, no necesariamente asociativas.

En el año 2007 Graham Robert Allan (1936-2007) publica un artículo donde establece que varias propiedades del radio espectral pueden ser establecidas por similares métodos, aunque más elementales, a los empleados por Aupetit y Ransford. Entre ellos establece un Principio del Máximo (débil y fuerte) del cual deduce un teorema de los tres círculos de Hadamard, un poco más general que el de Ransford. A partir de él, y siguiendo el argumento de

Ransford, establece el hecho clave dado por Aupetit en la prueba de su teorema, referido anteriormente. (ver [8] y [9, sections 5.9, 5.10]).

En 1985 A. Rodríguez (ver [241]) introduce los conceptos de *radical débil y ultra-débil* para álgebras arbitrarias. El radical ultra-débil contiene al radical débil y a la vez está contenido en los radicales que en la literatura ha jugado un papel relevante en la teoría de continuidad automática, así como en la Teoría de Estructura de algunas álgebras. En particular el radical ultra-débil está contenido en el radical de Jacobson de un álgebra asociativa o de Jordan. Rodríguez obtiene que álgebras con radical débil cero poseen la propiedad de la unicidad de la topología de la norma completa, y que los homomorfismos sobreyectivos de un álgebra normada completa en una tal algebra que además posee radical ultra-débil cero, son automáticamente continuos. Obteniendo así una bella, y no fácil, extensión al contexto no (necesariamente) asociativo de los teoremas a los que nos hemos referido anteriormente

Finalmente nos gustaría reseñar que las técnicas de Aupetit-Ransford-Allan han sido refinadas en la monografía de Cabrera-Rodríguez (ver [49, Section 3.8]) obteniendo extensiones no (necesariamente) asociativas de los teoremas de continuidad automática de homomorfismos y unicidad de la topología de la norma completa, a los que nos venimos refiriendo. El lector interesado también encontrará, en el mencionado libro, una amplia documentación histórica.

Volvamos a los números complejos y recordemos que el módulo de un número complejo z viene dado por la fórmula: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Lo que nos dice que la norma de la C*-álgebra de los números complejos, $\mathbb{C}$, y por consiguiente su geometría, viene determinada por su estructura algebraica. Cabe preguntarse si esta propiedad sigue siendo cierta para C*-álgebras arbitrarias. La respuesta es afirmativa y de hecho se tiene que en toda C*-álgebra se satisface la siguiente fórmula que, en el caso particular de $\mathbb{C}$, nos da la anterior igualdad. Concretamente:

Sea A una C-álgebra, entonces: $\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}$, para todo a en A.*

La anterior igualdad es una consecuencia de que, si a es un elemento *normal* $(a^*a = aa^*)$ en una C*-álgebra A, entonces el radio espectral de a coincide con su norma (ver [37, Proposition 7 y Theorem 8, pag. 190] y téngase en cuenta la Fórmula de Gelfand-Beurling) y que el elemento a^*a es un elemento normal para todo a en A.

Como consecuencia inmediata de la anterior fórmula se tiene que:

(a) *Todo $*$-isomorfismo entre C*-álgebras es una isometría y por consiguiente dos C*-álgebras $*$-isomorfas son indistinguibles.*

(b) *Todo $*$-homomorfismo entre C*-álgebras es continuo y de norma menor o igual a uno.*

(c) *Toda C*-álgebra es semisimple y por consiguiente todo homomorfismo sobreyectivo de un álgebra de Banach en una C*-álgebra es continuo.*

Por consiguiente la mencionada fórmula, no solo nos dice que la norma de una C*-álgebra es única, y viene determinada por la estructura algebraica, sino que además toda C*-álgebra, vista como un álgebra de Banach, posee la propiedad de la unicidad de la topología de la norma completa.

La pregunta de si toda isometría lineal sobreyectiva entre C*-álgebras es un $*$-isomorfismo tiene respuesta negativa, y por tanto no es cierto, en general, que toda isometría lineal sobreyectiva entre C*-álgebras debe ser un $*$-isomorfismo (ver si acaso [229]). De hecho dada una C*-álgebra es muy fácil construir una tal isometría sobre ella la cual no es un $*$-isomorfismo. Por consiguiente no podemos afirmar que la estructura algebraica en una C*-álgebra queda determinada por su geometría.

En 1951, (ver [155]), Richard V. Kadison (1925-) probó que: *Toda isometría lineal sobreyectiva,* Φ*, entre C*-álgebras unitales* A*,* B*, es de la forma :* $\Phi(a) = uF(a)$*, para todo* a *en* A*. Donde* u *es un elemento unitario* ($u^*u = uu^* = I$ *) en* B*, y* F *es un* $*$*-isomorfismo entre las álgebras de Jordan* A^+ *y* B^+*.*

Extendiendo de esta forma el clásico Teorema de Banach-Stone, que citamos anteriormente, al caso de C*-álgebras unitales no conmutativas. Posteriormente volveremos sobre este tema.

Ahora nos vamos a ocupar de presentar una propiedad geométrica la cual permite distinguir las C*-álgebras entre las álgebras de Banach complejas unitales. Una vez más la inspiración es encontrada en los números complejos. Sea pues z un número complejo y notemos por $0(\alpha)$ a toda función real en la variable real

α tal que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{0(\alpha)}{\alpha} = 0.$$

Es muy fácil de comprobar que:

$$\mid 1 + i\alpha z \mid = 1 + 0(\alpha) \text{ si, y solo si, } z \text{ es un número real.}$$

Ya que el conjunto de los *operadores simétricos* ($T^* = T$) en la C*-álgebra de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert complejo representa un papel análogo al que realizan los números reales en la C*-álgebra de los números complejos; Ivan Vidav (1918-) conjeturó que los operadores simétricos podrían ser caracterizados en términos de una propiedad similar a la que acabamos de presentar, donde el módulo fuese sustituido por la norma de operadores. Conjetura que comunicó por carta a Josef Wichmann (siglo XX-?) quien dio una respuesta afirmativa (ver [82, pag 178]). Así pues, teniendo en mente el Teorema de Gelfand-Naimark, podemos enunciar la siguiente caracterización de los elementos simétricos de una C*-álgebra unital, en términos de la geometría local:

Un elemento a en una C-álgebra unital es simétrico si, y solo si,*
$\|I + i\alpha a\| = 1 + 0(\alpha)$. *Donde I denota la unidad.*

(ver si acaso [35, Example 3 pag. 47])

En lo que sigue, dada un álgebra de Banach compleja y unital A, notaremos por $D(I)$ el conjunto de los funcionales ($f : A \to \mathbb{C}$) lineales f sobre A tales que $\|f\| = 1 = f(I)$, conocido como el *espacio de estados* de A. Hemos de reseñar que, gracias al Teorema de Hahn-Banach, (ver [247, Inicios Chapter 3]), $D(I)$ es no vacío y no varía si en vez de considerar A consideramos cualquier subespacio de A conteniendo a I. $V(a)$ denotará el subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathbb{C}$, conocido con el nombre de *rango numérico* de a, y definido por $V(a) = \{f(a)/f \in D(I)\}$. Finalmente $H(A)$ significará el conjunto de los elementos a de A satisfaciendo $\|I + i\alpha a\| = 1 + o(\alpha)$. Tales elementos eran denominados por Günter Lumer (1929-2005), como los *elementos hermitianos* de A (ver [189]). En el mencionado artículo, Lumer establecía (esencialmente) que un elemento a es hermitiano si, y solo si, $V(a)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$; lo cual equivale (ver [35, Lemma 2, pag. 46]) a que a satisfaga la condición geométrica local: $\|\exp(i\alpha a)\|$ = 1. Condición geométrica que, como es bien conocido, caracteriza a los números reales en el conjunto de los números complejos.

Ya que en una C*-álgebra unital el conjunto de los elementos simétricos coincide con el conjunto de los elementos hermitianos (ver [35, Lemma 2, pag. 46]), y ya que cualquier álgebra A con involución se puede escribir en la forma $A = Sim(A) + iSim(A)$, donde $Sim(A)$ denota el conjunto de los elementos simétricos de A, se deduce que, si A es una C*-álgebra unital entonces $A = H(A) + iH(A)$, siendo la suma tológica-directa ($H(A)$ es cerrado y $H(A) \cap iH(A) = 0$).

El desafío para el matemático esta ya servido, y consiste en dar respuesta a la siguiente cuestión:

¿Es toda álgebra de Banach compleja unital A satisfaciendo

$$A = H(A) + iH(A)$$

una C*-álgebra?.

Dado que, según hemos observado, el hecho de ser un elemento hermitiano depende exclusivamente de la *geometría local* en A (del subespacio engendrado por el elemento en cuestión y la unidad) y que dichos elementos han de coincidir con los elementos simétricos, debemos apostar por que la *involución natural* sobre $A = H(A) + iH(A)$ (vista como espacio vectorial) dada por $a^* = h - ik$, para $a = h + ik$ en A, que es precisamente la que existe en los números complejos, ha de ser una involución de álgebra, es decir $(ab)^* = b^*a^*$. Por otra parte en el año 1951 (ver [155]) Kadison ya había probado que en un álgebra de Banach compleja unital existe una única involución que la convierte en una C*-álgebra (otras pruebas de este hecho eran dadas por Henri Frederic Bohnenblust (1906-2000) y Samuel Karlin (1924-2007) en 1955 (ver [32]) y más tarde por Lumer en 1961 (ver [189])).

En el año 1956 Vidav (ver [289]) establecía el siguiente teorema:

Teorema de Vidav. *Sea A un álgebra de Banach compleja unital satisfaciendo:*

(a) $A = H(A) + iH(A)$.

(b) *Si h es un elemento hermitiano, entonces su cuadrado admite una representación $h^2 = u + iv$ tal que u, v son elementos hermitianos verificando $uv = vu$.*

Entonces se tiene que:

(a) *La descomposición* $a = h + ik$*, con* h*,* k *hermitianos, es única.*

(b) *La involución natural sobre* A *es una involución de álgebra. Además si* h *es es un elemento hermitiano entonces* $\|h^2\| = \|h\|^2$*.*

(c) *La igualdad* $\|a\|_0 = \sqrt{\|aa^*\|}$ *define una norma sobre* A*, equivalente a la de partida, bajo la cual* A *es una C*-álgebra.*

Este laborioso teorema suponía un primer paso a la respuesta de la cuestión planteada. Siguiendo la información dada en [35, pag. 57] y [82, pag. 180], hemos de decir que en 1966 Barnett Weil Glickfeld (siglo XX-?) y Earl Robert Berkson (siglo XX-?) presentaron dos pruebas independientes afirmando que, de hecho, la norma dada en *(c)* coincide con la norma original de A (ver [122, 28]). Dos años más tarde Theodore W. Palmer (1935-) (ver [216]) probaba que la hipótesis *(b)* en el teorema de Vidav era redundante y además daba una prueba más simple del hecho de que A es ya una C*-álgebra bajo su norma original. En 1970 Palmer (ver [217]) presentó una prueba más natural de sus resultados anteriores, utilizando con destreza la teoría de rango numérico de un elemento en un álgebra normada compleja y unital. El propio Palmer en el mencionado artículo dice: “el principal resultado de [216] es presentado en su propio contexto: la teoría de rango numérico de operadores sobre un espacio lineal normado.”

Pasaron pues doce años desde la aparición del teorema de Vidav y no pocas aportaciones a la teoría de las álgebras de Banach tales como: las realizadas por Nelson Dunford (1906-1986) en teoría de operadores, utilizada por Berkson; la simplificación de la prueba de la aportación de Glickfeld que hizo Robert B. Burckel (siglo XX-) (ver [238]) o el Teorema de Russo-Dye (ver [251], [37, Th. 38.12, pag. 210]) Bernard Russo (1939-)-Henry Abel Dye (1926-1986); para poder llegar a formular el siguiente teorema.

Teorema de Vidav-Palmer. *Sea A un álgebra de Banach compleja unital satisfaciendo: $A = H(A) + iH(A)$. Entonces A es una C*-álgebra bajo la involución natural.*

El teorema anterior junto a la caracterización geométrica de los elementos simétricos de una C*-álgebra, que hemos presentado anteriormente, permite formular una de las caracterizaciones más elegantes de las C*-álgebras con unidad, recogida en el siguiente teorema. De modo que tales álgebras no son otra cosa que una clase de álgebras de Banach complejas unitales que pueden ser descritas en términos de su geometría local es decir, en términos de la geometría de los subespacios generados por un elemento y la unidad, sin referencia alguna al producto.

Teorema asociativo de Vidav-Palmer. *Un álgebra de Banach compleja unital A, admite una involución bajo la cual es una C*-álgebra si, y solo si, $A = H(A) + iH(A)$.*

Teorema no asociativo de Vidav-Palmer

En lo que sigue utilizaremos la terminología de *V-álgebra* para designar a toda álgebra A compleja normada completa con unidad de norma igual a uno satisfaciendo que $A = H(A) + iH(A)$.

Donde $H(A)$ denota el conjunto de los elementos hermitianos de A, es decir, aquellos elementos a en A cuyo rango numérico $V(a)$ es un subconjunto de números reales ($V(a)$ es siempre no vacío). A la propiedad $A = H(A) + iH(A)$ se le conoce con el nombre de *axioma de Vidav* y si la involución natural de una V-álgebra ($(h + ik)^* = h - ik$) es un involución de álgebra, diremos que la involución natural es*multiplicativa*.

En Diciembre del año 1976 presenté mi Tesis Doctoral (dirigida por A. Rodríguez Palacios) cuyo objetivo consistía en el inicio de un estudio sistemático de las álgebras de Jordan-Banach, en completo paralelismo con el caso asociativo (ver [191]). Como es natural, en el intento perseguido, no podía faltar un tipo de álgebras de Jordan que jugasen un papel análogo al de las C*-álgebras. Si A es una tal álgebra y consideramos el álgebra simetrizada de A, A^+, entonces esta última pasa a ser un álgebra de Jordan-Banach compleja con involución pero, salvo que A sea conmutativa, siempre es posible encontrar un elemento a_0 en A tal que $\|a_0.a_0^*\| = \frac{1}{2}\|a_0\|^2$ (ver [191, pag. 11]). Lo que nos dice que el en álgebra simetrizada de una C*-álgebra, puede no ser cierta la propiedad estelar. Por consiguiente, tratar de construir una teoría para las álgebras de Jordan-Banach complejas, análoga a la de las C*-álgebras, por adición del Axioma de Gelfand-Naimark está condenada al fracaso, a menos que estemos dispuestos a olvidarnos de las álgebras simetrizadas de las C*-álgebras no conmutativas. Por otra parte si A posee unidad, dado que el conjunto de los elementos hermitianos de A depende de la geometría local de A, la cual coincide con la de A^+, se tiene que $A^+ = H(A^+) + iH(A^+)$. Es decir el álgebra simetrizada de toda C*-álgebra con unidad es una V-álgebra de Jordan. Hecho que invita a considerar las V-álgebras de Jordan, dentro de la clase de las álgebras de Jordan-Banach, como las similares a las C*-álgebras con unidad. Nosotros probamos que la involución natural de una V-álgebra de Jordan J es multiplicativa (ver [191, Teor.5.5.3, pag. 113]). Hecho que constituyó el nudo gordiano en la prueba del Teorema (asociativo) de Vidav-Palmer. Al igual que el caso asociativo, la dificultad principal se centró en probar que el cuadrado de todo elemento hermitiano es también hermitiano. En dicha prueba jugó un papel importante el siguiente Teorema espectral (ver [191, Teor.4.6.4, pag. 72] o [192]), al cual volveremos a referirnos más tarde.

Sea J un álgebra de Jordan-Banach compleja con unidad. Entonces:

$$Sp(R_a, BL(J)) \subseteq \frac{1}{2}(Sp(a, J) + Sp(a, J)), \textit{ para todo } a \textit{ en } J.$$

Donde R_a denota el operador de multiplicación por a en J ($R_a(b) = ba$) y $BL(J)$ el álgebra de Banach de los operadores lineales y continuos sobre J.

Al igual que nuestras V-álgebras de Jordan engloban a las subálgebras cerradas, autoadjuntas y unitales del álgebra simetrizada, $BL(H)^+$, de toda álgebra de operadores sobre un espacio de Hilbert complejo H; Erik Magnus Alfsen (1930-), Frederic W. Shultz (1945-) y Erling Störmer (1937-) presentaban en 1975 (y probaban un teorema de tipo Gelfand-Naimark) una clase de álgebras de Jordan-Banach reales, conocidas con el nombre de *JB-álgebras* (ver [5] y [133]), y entre las que se encuentran la parte simétrica de toda subálgebra cerrada y autoadjunta de $BL(H)^+$. A estas últimas se les conoce con el nombre de *JC-álgebras* y eran introducidas por Topping y Störmer en 1965 (ver [280] y [275]).

Recordemos que una JB-álgebra es un álgebra de Jordan-Banach real, J, satisfaciendo que $\|a\|^2 \leq \|a^2+b^2\|$ *para todo* a, b *en* J (Alfsen, Shultz y Störmer añadían también la presencia de unidad).

En relación con ambas axiomáticas nosotros probamos que la parte simétrica de una V-álgebra de Jordan J, es decir $H(J)$, es necesariamente una JB-álgebra (ver [191, Teor.5.5.16, pag. 116]). Por otra parte en la lectura final del Colloquium de St. Andrews de la Sociedad Matemática de Edinburgh celebrado en julio de 1976, Kaplansky introducía el concepto de *C*-álgebra de Jordan*, conocido hoy en día por el nombre de *JB*-álgebra* (ver [308, Introduction]). Para él una tal álgebra, J, es un álgebra de Jordan-Banach compleja dotada de una involución $*$ satisfaciendo:

1. $\|a\| = \|a^*\|$ *para todo* a *en* J

2. $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$ *para todo* a *en* J *y donde* U_a *es el operador lineal en* J *definido por* $U_a(b) = a(ba) + (ba)a - ba^2$*, para todo* b *perteneciente a* J

3. *Toda* $*$*-subálgebra asociativa y completa para la norma de* J *es una C*-álgebra*

Después de destacar la potencial importancia de tales álgebras propuso resolver la siguiente conjetura:

Toda isometría sobreyectiva entre JB-álgebras unitales conservando la unidad, ha de ser un *-isomorfismo.*

John David Maitland Wright (1942-) y Martin A. Youngson (siglo XX-) daban una respuesta afirmativa a dicha conjetura en 1978 (ver [306]). Lo que en particular da que, *la estructura algebraica de toda JB*-álgebra unital queda determinada por su geometría* (fijada la norma, la involución y el producto son únicos).

Respecto a la axiomática anterior queremos precisar varias cosas. La primera de ellas es que los axiomas 1 y 3 son redundantes, como ya era puesto de manifiesto por Youngson y Wright (ver [308, Lemma 4], [305, pag. 292], respectivamente). La segunda es que si A es una C*-álgebra (basta con que A sea asociativa normada con una involución $*$), es muy fácil ver que la igualdad $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$ es equivalente a $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo a en A. De ahí que al Axioma 2 se le conozca también por el nombre de Axioma de Gelfand-Naimark para álgebras de Jordan. Seguramente este detalle, así como que las subálgebras de Jordan especiales cerradas y autoadjuntas de una C*-álgebra son JB*-álgebras, era conocido por Kaplansky.

A las subálgebras de Jordan especiales cerradas y autoadjuntas de una C*-álgebra constituida por todos los operadores sobre un espacio de Hilbert complejo, se les conoce con el nombre de *JC*-álgebras* (ver [34]). Existen otras JB*-álgebras no especiales, tal es el caso de la JB*-álgebra excepcional M_3^8 (notada también como $H_3(\mathbb{O})$) constituida por el subespacio de las matrices de orden 3×3, con entradas en el álgebra de los Octoniones complejos

$\mathbb{O}$ (ver [87] o [312]) que son simétricas con respecto a la involución (lineal)
$(a_{i,j})^t := (\overline{a_{j,i}})$, y donde el producto considerado es el dado por $a \circ b := \frac{1}{2}(ab + ba)$ (ver [306], [305], [133, Remark 3.1.8]). La parte autoadjunta de este álgebra es la JB-álgebra de las matrices Hermitianas de orden 3×3 sobre los números de Cayley u octoniones reales (ver [87], [312, pag.34]), descubierta por E. P. Jordan, J. von Neumann y Eugene Paul Wigner (1902-1995) en 1934 (ver [154], [3] y [121]).

El estudio sistemático de la teoría de las JB*-álgebras[(a)] comienza con el trabajo de Wright, [305], publicado en 1977. Como principal resultado establece que en la complexificación de cada JB-álgebra con unidad existe una única norma que la dota de estructura de JB*-álgebra unital. Ya que los elementos autoadjuntos de una tal álgebra constituyen una JB-álgebra, se tiene así una correspondencia uno a uno entre las categorías de las JB-álgebras con unidad y la de las JB*-álgebras unitales. Hemos de decir que esta correspondencia sigue siendo cierta si no se supone la presencia de unidad ya que en [264] y [24] se prueba que la unitización de una JB-álgebra es una JB-álgebra, y lo mismo ocurre para el caso de JB*-álgebras ([309], [228, II.4.6 Corolario] o [223]). Ello permite a Wright dar la versión compleja del teorema de Gelfand-Naimark para JB-álgebras (establecido por Alfsen, Shultz y Störmer) de modo que, hasta cierto punto, la teoría de JB*-álgebras puede quedar reducida al estudio de las JC*-álgebras y al álgebra excepcional M_3^8 ([305, Theorem 3.3]).

Wright también prueba que *todo* $*$*-homomorfismo inyectivo* *entre JB*-álgebras unitales es isométrico y por consiguiente la norma de una JB*-álgebra unital es única y queda determinada por la estructura algebraica.* Por consiguiente, para el caso de JB*-álgebra unitales (en particular, los números complejos), la norma (por tanto la geometría) y la estructura algebraica, quedan mutuamente determinadas.

El Teorema asociativo de Vidav-Palmer cumple, una vez más, la regla de que lo bello suele ser lo mas útil y en consecuencia se ha mostrado como una magnífica herramienta matemática para establecer pruebas elementales acerca de resultados, unos conocidos y otros no, en la Teoría de las C*-álgebras (ver por ejemplo [35], [36], [49]).

Esta fue otra de las razones por la cual nosotros iniciamos el estudio de las V-álgebras de Jordan, cuando aún no había nacido el concepto de JB*-álgebra. Por la misma época, Bonsall presenta un artículo (ver [34, Corollary 16]) en el que, utilizando que una JB-álgebra (con unidad) es especial si, y solo si, es isomorfa a una JC-álgebra (ver [5, Lemma 9.4]), establece un teorema de tipo Vidav-Palmer para V-álgebras de Jordan especiales, probando que, salvo renormación si fuese necesario, éstas no son otra cosa que JC*-álgebras. Por otra parte es fácil probar que toda JB*-álgebra unital, J, es una V-álgebra de Jordan. A tal efecto basta recordar que el Axioma 3, en la axiomática de Kaplansky, se satisface automáticamente y por consiguiente la subálgebra de J, engendrada por un elemento simétrico y la unidad, es una C*-álgebra conmutativa, y por tanto tal elemento es hermitiano en J (ver si acaso [308, Theorem 7 (a)] o [310, Corollary 4]). Por todo ello es natural preguntarse si el recíproco es cierto, es decir, establecer el Teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan-Banach complejas unitales.

La respuesta es afirmativa. En efecto, en 1979 Youngson probaba que si J es una V-álgebra de Jordan y $H(J)$ es una subálgebra real de J, o lo que es equivalente: la involución natural de J es multiplicativa, entonces J con su norma e involución natural es una JB*-álgebra. Este mismo resultado era obtenido, independientemente, por Rodríguez en 1980 (ver [239]). Por consiguiente ya que, como hemos mencionado anteriormente, nosotros habíamos probado en 1977 que la involución natural de una V-álgebra de Jordan es multiplicativa, podemos afirmar que una tal álgebra es una JB*-álgebra (ver [192]). En consecuencia podemos enunciar un teorema análogo al Teorema asociativo de Vidav-Palmer, para álgebras de Jordan.

Teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan. *Un álgebra de Jordan-Banach compleja unital J, admite una involución bajo la cual es una JB*-álgebra si, y solo si,* $J = H(J) + iH(J)$.

Los resultados de Wright sobre la complexificación de una JB-álgebra, unidos al teorema anterior, establecen una perfecta relación entre las axiomáticas de: JB-álgebra unital, JB*-álgebra unital y V-álgebra de Jordan.

Nuestro próximo objetivo va a consistir en presentar el más amplio contexto algebraico en el cual la involución natural de una V-álgebra es multiplicativa y por tanto delimitaremos el campo donde el teorema de Vidav-Palmer puede ser establecido.

Recordemos que un álgebra A se dice que es *alternativa* si satisface las siguientes dos identidades:

1. $a^2b = a(ab)$,
2. $ba^2 = (ba)a$,

para todo a, b en A.

Toda álgebra asociativa es trivialmente alternativa y éstas son "localmente" asociativas, ya que un famoso Teorema de Emil Artin(1898-1962) establece que un álgebra A es alternativa si, y solo si, la subálgebra engendrada por dos elementos arbitrarios de A es asociativa (ver [256, pag.29] o [312, pag.36]). Las álgebras de los octoniones reales o complejos, son ejemplos de álgebras alternativas no asociativas (ver [256, pag.47] o [312, Lemma 2.9]).

Un álgebra A se dice que es de *Jordan no conmutativa* si satisface las siguientes dos identidades:

1. $(ab)a = a(ba)$, (*ley flexible*)
2. $(a^2b)a = a^2(ba)$, (*axioma de Jordan*)

para todo a, b en A.

Claramente toda álgebra de Jordan o alternativa es un álgebra de Jordan no conmutativa. Si A es un álgebra asociativa, con producto $(a, b) \mapsto ab$, y λ es un elemento perteneciente al cuerpo base entonces la aplicación $(a, b) \mapsto \lambda ab + (1 - \lambda)ba$, define un nuevo producto ($\lambda \neq 1$) bajo el cual A es un álgebra de Jordan no conmutativa. Además si $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y A no es conmutativa, entonces este nuevo producto no satisface la propiedad conmutativa.

La definición formal de álgebra de Jordan no conmutativa era dada por Richard Donald Schafer (siglo XX-) en 1955 (ver [255]) si bien ya habían aparecido en un trabajo de A. A. Albert en 1948 (ver [4]). En el año 1978, Gabor Domokos (siglo XX-) y Susan Kövesi-Domokos (siglo XX-) (ver [80, 297, 298]), construyen un álgebra de Jordan no conmutativa de dimensión 7, conocida con el nombre del *álgebra de color*, que permite describir propiedades del "modelo quart", introducido por Murray Gell-Mann (1929-) (Premio Nobel de Física en 1969) y Kazuhiko Nishijima (1926-2009), en la Física de particular (ver [120]). En ese mismo año, Amin Mojtar Kaidi(1948-), cuyo nombre actualmente es Elamin Kaidi Lhachmi, presenta su Tesis Doctoral (ver [206]) en la cual realiza un estudio de las mencionadas álgebras desde el punto de vista de las álgebras de Banach, en la linea seguida en mi Tesis Doctoral. Hasta entonces, las álgebras de Jordan, propiamente, no conmutativas, solo se habían estudiado desde el punto de vista algebraico. Ver por ejemplo [255, 75, 203, 198, 199, 201, 204].

Recordemos que una involución $*$ sobre un álgebra normada se dice que es isométrica si $\|a^*\| = \|a\|$, para todo elemento a. En un trabajo realizado en colaboración con Kaidi y Rodríguez (ver [193]), publicado en 1981, probábamos el siguiente teorema:

Teorema-MMR. *Para toda V-álgebra A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A es un álgebra de Jordan no conmutativa.

(b) La involución natural de A es multiplicativa.

(c) La involución natural de A es isométrica.

Este teorema aparece en trabajo de Rodríguez, ([239, Theorem. 8]), citado anteriormente, donde prueba que *(a)* implica *(c)*; remitiendo el resto de la prueba a resultados que aparecen la Tesis Doctoral de Kaidi y en la mía propia. La primera consecuencia que obtenemos es que, la equivalencia entre *(a)* y *(b)* nos delimita la clase de álgebras no asociativas donde el Teorema de Vidav-Palmer puede ser establecido; e invitamos al lector a que descubra otros lindos mensajes que nos deja el mencionado teorema.

Por otra parte si se tiene en cuenta que un álgebra A es V-álgebra si, y solo sí, lo es A^+ (el álgebra simetrizada de A), que la involución natural de una V-álgebra es multiplicativa si, y solo sí, lo es en su álgebra simetrizada (ver [193, 5. Corollary]), que para un álgebra de Jordan no conmutativa A, el operador U_a definido por $U_a(b) = a(ba) + (ba)a - ba^2, a, b$ en A, coincide con el operador U_a^+ definido de la misma manera pero en el álgebra de Jordan A^+ (ver si acaso [206, Proposición 4.4.5]) y el Teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan; podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan no conmutativas. *La clase de las V-álgebras de Jordan no conmutativas coincide con la clase de las álgebras de Jordan no conmutativas con unidad complejas normadas completas dotadas de una involución de álgebra $*$ satisfaciendo que $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$, para todo elemento a.*

A toda álgebra de Jordan no conmutativa, A, compleja, normada completa y dotada de una involución, $*$, satisfaciendo el axioma:

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3, \textit{ para todo elemento } a \textit{ en } A$$

se le conoce con el nombre de *JB*-álgebra no conmutativa.* De modo que el teorema anterior puede enunciarse en los siguientes términos:

La clase de las V-álgebras de Jordan no conmutativas coincide con la clase de las JB-álgebra no conmutativas unitales.*

Teorema que engloba a los teoremas de Vidav-Palmer para álgebras asociativas y Jordan. También queda patente que en un álgebra de Jordan no conmutativa, compleja, unital, normada y completa existe una única involución que la convierte en una JB*-álgebra no conmutativa. Además, teniendo en cuenta que la unitización de toda JB*-álgebra no conmutativa A, es una JB*-álgebra no conmutativa unital (y por tanto una V-álgebra) cuya norma es una extensión de la de A ([228, II. 4. 6 Corolario] o [223]), y que todo $*$-homomorfismo inyectivo entre JB*-álgebras unitales es isométrico ([305]), podemos afirmar que *la norma de una JB*-álgebra no conmutativa es única y viene determinada por la estructura algebraica.*

En otra dirección, gracias al Teorema de Artin, podemos afirmar que, para álgebras alternativas normadas dotadas de una involución $*$, la Propiedad Estelar ($\|a^*a\| = \|a\|^2$) es equivalente al axioma $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$. De modo que, como una fácil consecuencia del teorema anterior, podemos enunciar el siguiente Corolario, previamente establecido por Rodríguez en 1980 (ver [239, Corollary. 9], [206, Teorema 4.5.14] o [45]).

Corolario-A. *Toda V-álgebra alternativa A satisface la Propiedad Estelar, es decir: $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo a en A y donde $*$ denota la involución natural.*

El anterior corolario unido al Teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan no conmutativas, nos permite afirmar que, en el ambiente de las álgebras alternativas, se da la equivalencia entre la Propiedad Estelar, el Axioma de Vidav y la propiedad $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$.

Corolario-B.*Sea A un álgebra compleja, alternativa, normada completa, unital dotada de una involución $*$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\|a^*a\| = \|a\|^2$ *para todo a en A*

(b) $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$ *para todo a en A*

(c) *A es una V-álgebra.*

En relación con la anterior afirmación hemos de decir que el álgebra de los octoniones complejos puede ser dotada de una norma que la convierte en una V-álgebra (ver [193, Example. 13]), y por consiguiente tenemos asegurada la existencia de V-álgebras alternativas no asociativas.

Rodríguez probó que, en un ambiente mínimo apropiado, la identidad alternativa se sigue de la Propiedad Estelar; mostrando con ello la fuerza matemática de esta última. En particular podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema-A. *Toda álgebra compleja con unidad, normada completa, dotada de una involución y satisfaciendo la Propiedad Estelar; ha de ser una V-álgebra alternativa cuya involución natural coincide con la original.* (ver [239, Theorem. 14])

De hecho el mencionado autor prueba el resultado anterior bajo condiciones más generales. A partir del Teorema-A y del Corolario-B podemos establecer el siguiente corolario, el cual muestra una insospechada equivalencia entre la Propiedad Estelar y la identidad alternativa, en el ambiente de álgebras no asociativas, generadas por sus elementos hermitianos ($A = H(A) + iH(A)$).

Corolario-C. *Sea A una V-álgebra y $*$ su involución natural. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\|a^*a\| = \|a\|^2$ *para todo* a *en* A

(b) A *es un álgebra alternativa.*

Recordemos que un álgebra se dice que es de *potencias asociativas* si la subalgebra engendrada por cualquier elemento es un álgebra asociativa, y que toda álgebra de Jordan no conmutativa es de potencias asociativas. En el trabajo realizado en colaboración con Kaidi y Rodríguez, anteriormente mencionado, probábamos que la involución natural de toda V-álgebra de potencias asociativas es multiplicativa, y en consecuencia una tal álgebra ha de ser de Jordan no conmutativa, gracias al Teorema-MMR. Dado que, para un álgebra, la propiedad de ser de potencias asociativas es muy débil, nos llevó a conjeturar que toda V-álgebra ha de ser un álgebra de Jordan no conmutativa. La destreza matemática de Angel Rodríguez le condujo a dar una respuesta afirmativa a dicha conjetura, estableciendo en 1983 (ver [240, Theorem. 1]) que la involución natural de toda V-álgebra es siempre multiplicativa. La prueba dada por Rodríguez de esta afirmación es novedosa ya que es muy diferente de las ya referidas para el caso asociativo y Jordan.

Teniendo ahora en cuenta el Teorema-MMR, podemos enunciar el siguiente bello y sorprendente resultado, el cual nos dice que si un álgebra compleja, normada completa y unital está generada por sus elementos hermitianos (recordemos que el concepto de elemento hermitiano es un concepto geométrico); entonces ha de ser un álgebra flexible, satisfaciendo la identidad de Jordan; es decir posee una rica cualidad algebraica a saber: ha de ser un álgebra de Jordan no conmutativa.

Teorema de Rodríguez. *Toda V-álgebra es un álgebra de Jordan no conmutativa.*

Este teorema, unido al Teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan no conmutativas, nos permite enunciar el siguiente otro:

Teorema de Vidav-Palmer para álgebras no asociativas. *La clase de las V-álgebras coincide con la clase de las JB*-álgebra no conmutativas unitales.*

A la luz del Teorema de Rodríguez y del Teorema-A, cabe plantearse la siguiente cuestión:

¿Es toda álgebra compleja dotada de una involución, $*$, normada completa, unital y satisfaciendo $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$, para todo elemento a, un álgebra de Jordan no conmutativa?.

La respuesta es afirmativa y está contenida en el siguiente resultado, el cual supone un refinamiento matemático del teorema anterior (ver [240, Theorem. 12 y Notes and Remarks. 14]). Hemos de decir que salvo la implicación *(b)* implica *(a)*, el resto de las afirmaciones se deducen del Teorema de Rodríguez y del Teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan no conmutativas.

Teorema-B. *Sea A un álgebra compleja, normada completa y unital. Las afirmaciones (a) y (b) que enunciamos a continuación son equivalentes y cualesquiera de ellas implica la afirmación (c).*

(a) *A satisface el axioma de Vidav.*

(b) *Existe una aplicación en A, $*$, conservando la suma, conjugado lineal y de cuadrado la identidad tal que $I^* = I$ y $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$, para todo elemento a en A.*

(c) *A es un álgebra de Jordan no conmutativa y la aplicación $*$, cuya existencia se asegura en (b), coincide con la involución natural de A y por consiguiente es una involución sobre A.*

El lector interesado en los teoremas de estructura y representación de las JB*-álgebras no conmutativas, puede acudir a los trabajos: [223], [224], [45], [44], [10], [157] y a los resúmenes que aparecen en [242], [158].

5 JB*-triples

En el apartado titulado *Funciones complejas de variable compleja* hemos visto que, desde el punto de vista de la holomorfía, solo existen dos dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}$, a saber: el propio $\mathbb{C}$ y el disco unidad. Recordemos ahora que dados dos espacios de Banach complejos E, F y un abierto U de E se dice que una aplicación de U en F es *holomorfa* en U si es derivable Fréchet en cada punto de U. Pues bien, en 1907, Jules Henri Poincaré (1854-1912) demostró (ver [231]) que entre las bolas unidad (abiertas) de $\mathbb{C}^2$ correspondientes a la norma del máximo y a la euclídea, respectivamente, no es posible establecer una aplicación biyectiva y bioholomorfa (tanto ella como su inversa son holmorfas), y por consiguiente el Teorema de Riemann de Representación Conforme no se verifica (ver también [248, pag. 27], [59, pag. 185]). Lo que nos lleva a que en $\mathbb{C}^n$, con n mayor o igual a dos, la clasificación de los dominios simplemente conexos se convierte en intratable.

Por otra parte, para todo punto a del disco unidad (abierto), D, de $\mathbb{C}$ existe una aplicación, S_a, biyectiva y biholomorfa en D, conocida como *simetría* de D en a, tal que S_a^2 es igual a la identidad y a es un punto aislado fijo para S_a (ver [235, pag. 270-271]). Esta cualidad, unida al hecho de que D es un dominio acotado, se axiomatiza diciendo que todo subconjunto abierto, Ω, de un espacio de Banach complejo que posea las mencionadas tres cualidades, es un *dominio simétrico acotado*. Además, para cada a en Ω, la simetría S_a, queda unívocamente determinada por a. Fijado a en Ω

se dice que Ω es un dominio simétrico con punto base (ver si acaso [170] o [185] o [60]).

Los dominios simétricos acotados hacen el papel (de hecho son simplemente conexos, [285, The. 2.10]) de los dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}$, y en el caso finito-dimensional eran descritos en 1935 por Elie Cartan (1869-1951) (ver [55], [141, Chapter X. Section 6]) en los términos que veremos a continuación.

A efectos de facilitar la comprensión recordemos que un dominio simétrico acotado se dice que es *reducible* si es producto cartesiano topológico de dos dominios simétricos acotados. En caso contrario se dice que es *irreducible*. En dimensión finita, estos últimos, salvo *isomorfismos* (aplicaciones biyectivas y biholomorfas) coinciden con la bola unidad abierta de ciertos espacios de Banach complejos conocidos con el nombre de *factores de Cartan clásicos*. Hemos de decir también que en 1956, Harish-Chandra (1923-1983) (ver [134]) daba una nueva prueba de la existencia de dichos factores por un método general, independientemente de la clasificación de los grupos de Lie simples (ver también [254]).

Se denominan *factores de Cartan*, sin restricción de dimensión, a uno de los siguientes seis tipos de espacios de Banach: Los factores de Cartan de *Tipo 1* son los espacios de Banach complejos, $BL(H, K)$, de los operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert complejos H y K. En el caso de que H y K sean de dimension finita n y m respectivamente, no son otra cosa que los espacios lineales de las matrices de orden n por m con entradas en los números complejos, dotados de la norma de operadores.

Los factores de Cartan de *Tipo 2* y *Tipo 3* son subespacios (cerrados) de factores de Tipo 1. Para definirlos recordamos que dada una *conjugación* (operador conjugado lineal e isométrico de cuadrado la identidad), j, sobre un espacio de Hilbert complejo H, podemos definir la siguiente involución lineal $T \mapsto T^t := jT^*j$ de $BL(H)$ en sí mismo. El factor de Tipo 2 (respectivamente el Tipo 3) es el subespacio de $BL(H)$ formado por todos los operadores anti-simétricos (resp. simétricos) para dicha involución.

Se denomina factor de Cartan de *Tipo 4* o factor de *Tipo Spin* a cualquier espacio de Hilbert complejo H, de dimensión mayor que dos, provisto con una conjugación $x \mapsto \overline{x}$ y dotado de la norma

$$\|x\|_1^2 := \langle x , x \rangle + \sqrt{\langle x , x \rangle^2 - |\langle x , \overline{x} \rangle|^2},$$

donde $\langle x , x \rangle$ denota el producto escalar de x por x. Todo factor de Tipo Spin se puede ver como un subespacio cerrado y autoadjunto de un $BL(K)$ (K espacio de Hilbert complejo) con la propiedad de que el cuadrado de cada uno de sus elementos sea un múltiplo de la identidad (ver [136]).

El factor de Cartan de *Tipo 6* es precisamente la JB*-álgebra excepcional M_3^8 (también notada por $H_3(\mathbb{O})$).

Por último, el factor de Cartan de *Tipo 5* es el conjunto formado por las matrices 1×2 , $M_{1,2}(\mathbb{O})$, con entradas en los octoniones complejos, y puede ser visto como un subespacio del factor de

Tipo 6 via el monomorfismo

$$(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \overline{a} & 0 & 0 \\ \overline{b} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ para cada } a,b \in \mathbb{O}$$

.

A los factores de Tipo 5 y 6 se les conoce con el nombre de *factores de Cartan excepcionales.*

La descripción de Cartan de los dominios simétricos acotados, en dimensión finita, queda recogida en los siguientes teoremas:

Teorema-A. *Todo dominio simétrico acotado es el producto (cartersiano) topológico de dominios simétricos acotados irreducibles.*

Teorema-B. *Todo dominio simétrico acotado finito-dimensional irreducible es, salvo isomorfismos, la bola unidad abierta de alguno de los factores de Cartan clásicos.*

El Teorema-B de Cartan puede verse como una extensión del Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann, al caso de dimensión finita mayor o igual a dos.

Cartan utiliza la descripción de las álgebras de Lie complejas simples como herramienta para la determinación de los dominios simétricos acotados, y sus técnicas sugieren una conexión entre estos y los sistemas triples de Jordan, conexión que fue explícitamente establecida, treinta y cuatro años más tarde, por Max Koecher (1924-1990) (ver [180]). La contribución al desarrollo de los sistemas triples de Jordan llevada a cabo por Kurt Meyberg (siglo XX-) y Ottmar Loos (1939-) (ver [205] y [186]); permitieron obtener a este último , en 1977, una definitiva clasificación de los dominios a los que nos venimos refiriendo, en términos de sistemas triples de Jordan (que definiremos a continuación). Estableciendo una correspondencia biyectiva entre los dominios simétricos acotados irreducibles y la bola unidad abierta de los sistemas triples de Jordan complejos finito-dimensionales simples, los cuales son precisamente los factores de Cartan clásicos (ver [187, Sect. 4]).

El paso definitivo que llevaría a la clasificación de los dominios simétricos acotados en dimensión arbitraria era dado por Wilhelm Kaup (1936-) en el año 1983. En efecto Kaup, inspirado, entre otros, por el trabajo realizado en el caso finito-dimensional y los trabajos de: Joseph A. Wolf (1936-) [303], Lawrence Albert Harris (1944-) [136], Jean Pierre Vigué (1948-) [290] y [291]; más los suyos propios: [164], [166], [165], y [168]; prueba, como resultado principal, en [167], la existencia de un conjunto de axiomas algebraico-geométrico-analíticos (que veremos a continuación) los cuales identifican a una clase de espacios de Banach complejos conocidos por el nombre de JB*-triples, y establece que:

Teorema de Kaup-A *Todo dominio simétrico acotado en un espacio de Banach complejo es isomorfo a la bola unidad de un JB*-triple, y ésta siempre es un dominio simétrico. De modo que la categoría de todos los dominios simétricos acotados con punto base es equivalente a la categoría de los JB*-triples.*

Queremos reseñar que una de las herramientas matemáticas utilizadas por Kaup en la prueba del anterior resultado, destacada por Harald Upmeier (1950-) en su informe para la revista Mathematical Reviews (ver MR710768 (85c:46040)), es el Teorema espectral para álgebras de Jordan-Banach. Este teorema nos dio la llave para nuestra prueba de la multiplicatividad de la involución natural en el caso de V-álgebras de Jordan, según comentamos en la sección dedicada al Teorema no-asociativo de Vidav-Palmer. Ello pone de manifiesto que, en matemáticas, los hechos "interesantes" conviene no olvidarlos aunque no jueguen el papel para el que fueron concebidos.

La brillante contribución de Kaup unida al precedente establecido por Harris en [136], establece una relación entre el Análisis Funcional, los sistemas triples de Jordan y la holomorfía infinito-dimensional. Los JB*-triples también aparecen, desde el punto de vista del Análisis Funcional, como la estructura matemática que posee la imagen de una proyección contractiva sobre una C*-álgebra (ver [104], [105], [269] y [169]). Desde su aparición en los años ochenta del pasado siglo han pasado a tener un papel preponderante, no solo en el Análisis Funcional sino también en la Física, campo en el que irrumpen con el trabajo pionero de Yaakov Friedman (siglo XX-) y Ari Naimark (1943-) publicado en 1992 (ver [103], ver también [101] y [108]).

El lector interesado puede consultar [283, 285, 43, 149, 250, 60, 102, 61, 227, 96, 113], entre otros.

En 1976 Kaup y Upmeier probaban el siguiente teorema, cuya prueba era simplificada por Harris tres años mas tarde (ver

[171] y [137]), el cual nos dice que todo espacio de Banach complejo queda determinado por la estructura holomórfica de su bola unidad abierta

Teorema de Kaup-Upmeier. *Dos espacios de Banach complejos son isométricamente isomorfos si, y solo si, existe una aplicación biyectiva y biholomorfa entre sus correspondientes bolas unidad abiertas.*

Los teoremas de Kaup-A y Kaup-Upmeier, unidos al hecho de que las isometrías lineales biyectivas entre JB*-triples coinciden con los isomorfismos algebraicos entre ellos (ver [167, Proposition 5.5]), nos permiten enunciar que:

Dos dominios simétricos acotados son isomorfos si, y solo si los correspondientes JB-triples asociados son isométricamente isomorfos, es decir matemáticamente indistinguibles.*

Por consiguiente la clasificación de los dominios simétricos acotados se traslada a la clasificación de los JB*-triples.

Creo que antes de seguir avanzando en la información que presentamos acerca de los JB*-triples, debemos introducir su definición, comenzando con el concepto de sistema triple de Jordan al que también nos hemos referido. Un *sistema triple de Jordan complejo (resp. real)* es un espacio vectorial complejo (resp. real) V, junto con una aplicación

$$\{.,.,.\} : V \times V \times V \to V$$

$$(x, y, z) \mapsto \{x, y, z\}$$

llamada *producto triple*, que es bilineal y simétrica en las variables exteriores y conjugada lineal (resp. lineal) en la central, verificando la siguiente identidad conocida como *identidad de Jordan*:

$$\{x, y, \{a, b, c\}\} = \{\{x, y, a\}, b, c\} - \{a, \{y, x, b\}, c\} + \{a, b, \{x, y, c\}\}$$

para cualesquiera x, y, a, b, c en V.

Ejemplos de sistemas triples de Jordan son los siguientes:

(a) El espacio de las matrices con n filas y m columnas con entradas en el cuerpo de los números complejos o reales, $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, donde el producto triple viene dado por $\{R, S, T\} = \frac{1}{2}(RS^*T + TS^*R)$ para R, S, $T \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ y S^* es la matriz que se obtiene de aplicar a S la usual trasposición de matrices y conjugar en las entradas.

(b) Todo espacio prehilbertiano H, con el triple producto

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(\langle x\, ,\, y\rangle z + \langle z\, ,\, y\rangle x),$$

donde $\langle \cdot\, ,\, \cdot\rangle$ denota el producto escalar en H.

Todo subespacio de un sistema triple de Jordan (real o complejo), V, que es cerrado para el producto triple se dice que es un *subtriple* de V. Dado un sistema triple de Jordan V y dos elementos a, b de V, notaremos por $L(a, b)$ al operador lineal de V en V que aplica cada x en $\{a, b, x\}$.

Un *JB***-triple* es un sistema triple de Jordan complejo, E, provisto de una norma que lo dota de estructura de espacio de Banach satisfaciendo:

(a) para cada $a \in E$ el operador $L(a,a)$ es hermitiano con espectro no negativo.

(b) para cada $a \in E$, se tiene que $\|L(a,a)\| = \|a\|^2$.

La definición original de Kaup imponía que el producto triple fuese continuo pero ello se sigue del axioma (a), el cual exige la continuidad del operador $L(a,a)$, para todo a en el JB*-triple, y de la siguiente *identidad de polarización* la cual es válida en cualquier sistema triple de Jordan complejo y para cualesquiera que sean α, β números reales:

$$4\alpha\beta L(a,b) = \sum_{n=0}^{3} i^n L(\alpha a + \beta i^n b, \alpha a + \beta i^n b) \tag{5.1}$$

De hecho, teniendo en cuenta el axioma (b) y tomando $\alpha = \|x\|^{-1}$ y $\beta = \|y\|^{-1}$ en la identidad de polarización, se sigue que

$$\|L(x,y)\| \leq 4\|x\|\|y\|.$$

Friedman y Russo probaron que de hecho se tiene que

$$\|L(x,y)\| \leq \|x\|\|y\|$$

(ver [107, Corollary 3]).

Por otra parte el axioma (b) puede ser reemplazado por el siguiente otro:

(b') Para cada $a \in E$, se tiene que $\| \{a,a,a\} \| = \|a\|^3$.

(ver [96, pag. 10-11]).

Axioma que se conoce con el nombre de axioma de Gelfand-Naimark o la Propiedad estelar para JB*-triples. Nombre que viene justificado por el hecho de que toda C*-álgebra es un JB*-triple para el producto triple dado por: $\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a)$ para a, b, c, y recordar que la propiedad estelar para toda C*-álgebra A se puede reformular en los términos:

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \text{ para todo } a \text{ en } A.$$

Igualdad que coincide con el axioma (b') cuando consideramos a A como JB*-triple.

El siguiente teorema constituye un caso especial del Teorema de Kaup-A y permite reconocer entre los espacios de Banach complejos, aquellos que son JB*-triples (ver si acaso [60, Theorem 2.5.27]).

Un espacio de Banach complejo es un JB-triple si, y solo si, su bola unidad abierta es un dominio simétrico.*

La belleza de este resultado (al igual que las aportaciones de Koecher y Loos en el caso finito-dimensional) reside en ver cómo, bajo una propiedad holomorfa de la bola unidad de un espacio de Banach complejo se esconde un sistema triple de Jordan. Es decir, a partir de una propiedad holomorfa surge una estructura algebraica.

Ejemplos de JB*-triples son los siguientes:

- Toda JB*-álgebra es un JB*-triple si se considera como producto triple

$$\{a,b,c\} = (a \circ b^*) \circ c + (c \circ b^*) \circ a - (a \circ c) \circ b^*,$$

(ver [283, 20.35]). En particular los factores de Cartan de Tipo 5 y 6 son JB*-triples para el producto triple anterior.

- Si A es una C*-álgebra, entonces A^+ es una JB*-álgebra. Así, del ejemplo anterior se sigue que A es un JB*-triple bajo el producto triple

$$\{a,b,c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a).$$

- Recordemos que todo subtriple cerrado de un JB*-triple es un JB*-triple (ver si acaso [283, Corollary 20.9]). Sean ahora H, K dos espacios de Hilbert complejos y consideremos el espacio de Hilbert M igual a la suma hilbertiana de H y K, entonces el espacio $BL(H,K)$ puede ser visto, de forma natural (ver si acaso [283, pag. 301]), como un subtriple cerrado del JB*-triple $BL(M)$. Luego se tiene que $BL(H,K)$ es un JB*-triple. En consecuencia los factores de Cartan de Tipo 1, 2 y 3 son JB*-triples para el producto triple

$$\{a,b,c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a),$$

donde $*$ significa la adjunción de operadores.

- Una J*-álgebra es un subespacio lineal y norma cerrado de $BL(H,K)$ que además es cerrado para la operación algebraica $a \mapsto aa^*a$. Estos modelos fueron introducidos por Harris en 1973, en conexión con el estudio de los espacios de Banach cuya bola unidad es un dominio simétrico acotado (ver

[136]). Utilizando la identidad de polarización (5.1), no es difícil probar que toda J*-álgebra puede ser dotada de estructura de sistema triple de Jordan bajo el producto triple:

$$\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a).$$

Ya que cada J*-álgebra es un subtriple cerrado del JB*-triple $BL(H, K)$, se tiene que toda J*-álgebra es un JB*-triple, para el producto anterior.

- El Factor de Tipo Spin es también un JB*-triple par el producto triple:

$$\{x, y, z\} := \langle\, x \,,\, y \,\rangle z + \langle\, z \,,\, y \,\rangle x - \langle\, x \,,\, \overline{z} \,\rangle \overline{y}$$

- Dada una familia $\{E_i\}_{i\in I}$ de JB*-triples, el espacio de Banach

$$\oplus^\infty E_i \equiv \{x \in \Pi_{i\in I} E_i \;:\, \|x\| = sup\{\|x_i\| \;: i \in I\} < \infty \;\}$$

  con producto triple definido coordenada a coordenada, es un nuevo JB*-triple, conocido como la ℓ_∞-suma de la familia $\{E_i\}_{i\in I}$ (ver [167, pag.523]).

Recordemos que un *morfismo* entre sistemas triples de Jordan es una aplicación lineal que conserva el producto triple, si además es una aplicación biyectiva se dice que es un *isomorfismo*. En 1986 Friedman y Russo establecían (ver [107]) lo que hoy en día conocemos con el nombre de Teorema de Gelfand-Naimark para JB*-triples el cual afirma:

Todo JB-triple es isométricamente isomorfo a un subtriple de una* ℓ_∞*-suma de alguna colección de factores de Cartan.*

El lector interesado en la Teoría de estructura de los JB*-triples puede consultar [250], donde aparece una ordenada y completa información. Nosotros estamos ahora interesados en mostrar que, en dichos objetos matemáticos, la estructura algebraica determina la geométrica y recíprocamente. Siendo ésta una de las cualidades más útiles y atractivas.

Recordemos que un elemento a en una C*-álgebra se dice que es una *isometría parcial* si $p = aa^*$ es una proyección ($p = p^* = p^2$), o lo que es equivalente $aa^*a = a$ (ver [226, 2.2.8]). En álgebras de Von Neumann, es decir en C*-álgebras que son duales de un espacio de Banach, las isometrías parciales juegan un papel análogo al que desempeña $\exp(i\theta)$ en la descomposición polar de un número complejo. Concretamente si a es un elemento en una tal álgebra entonces existe una única isometría parcial u tal que a puede escribirse en la forma $a =| a | u$, donde $| a |$ es la raíz cuadrada de a^*a (ver [226, Proposition 2.2.9]). Por otra parte un elemento e de un sistema triple de Jordan se dice que es un *tripotente* si $\{e, e, e\}$ es igual a e. Por consiguiente cuando una C*-álgebra es vista como un JB*-triple, entonces las isometrías parciales coinciden con los tripotentes.

En los JB*-triples E que son duales de un espacio de Banach E_*, conocidos con el nombre de *JBW*-triples*, está asegurada la abundancia de tripotentes. Además se conoce que E_* es único y que el producto en E es separadamente w*-continuo (ver [106], [23], [194] y [146, Theorem 3.21]). En la literatura aparecen diversas caracterizaciones geométricas de las isometrías parciales en un álgebra de von Newmann (ver por ejemplo [72, Lemma 5]) así como de los elementos tripotentes de un JBW*-triple (ver por ejemplo [89] y [148]). Todas ellas requieren un amplio bagaje de la teoría desarrollada sobre dichos objetos matemáticos. En el año 2002, Charles Akemann (siglo XX-) y Nik Weaver (siglo XX-) establecen una caracterización de las isometrías parciales de una C*-álgebra A en términos de la estructura del espacio de Banach subyacente a A. Concretamente ellos prueban (ver [2, Theorem 1]) que un elemento x de norma uno en una C*-álgebra A es una isometría parcial si, y solo si, los conjuntos

$$D_1(x) := \{y \in A : \text{ existe } \alpha > 0 \text{ tal que } \|x + \alpha \,\text{y}\| = \|x - \alpha y\| = 1\}$$

y

$$D_2(x) := \{y \in A : \|x + \beta y\| = \text{máx}\{1, \|\beta y\|\} \text{ para todo } \beta \in \mathbb{C}\}$$

coinciden.

En particular se tiene una sencilla caracterización geométrica de los tripotentes de una C*-álgebra vista como JB*-triple.

En un trabajo realizado en colaboración con Francisco José Fernández Polo (1976-) y Antonio Miguel Peralta Pereira (1974-), publicado en el 2004, probamos que tal caracterización geométrica es válida para los tripotentes de un JB*-triple arbitrario. Más aún nosotros probamos que si E es un JB*-triple, entonces en el correspondiente conjunto $D_2(x)$, el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$, puede ser sustituido por el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, (ver [97, Theorem 2.1 y Remark 2.4]). De modo que a partir del conocimiento de la estructura de espacio de Banach real de un

JB*-triple podemos detectar los elementos tripotentes. En consecuencia podemos afirmar que las isometrías lineales reales (en particular complejas) sobreyectivas entre JB*-triples conservan los elementos tripotentes.

La formulación del Teorema de Banach-Stone en el caso de C*-álgebras unitales, realizada por Kadison en 1951, asegura que:

Toda isometría lineal sobreyectiva, Φ*, entre C*-álgebras unitales* A*,* B*, es de la forma :* $\Phi(a) = uF(a)$*, para todo* a *en* A*. Donde* u *es un elemento unitario en* B*, y* F *es un* $*$*-isomorfismo entre las álgebras de Jordan* A^+ *y* B^+.

En consecuencia, y tal como Kadison pone de manifiesto en la introducción de su artículo, la aplicación F conserva la estructura de álgebra de Jordan y los elementos simétricos. Es decir, F conserva la estructura ”mecánica cuántica”de las C*-álgebras y por consiguiente, dicha estructura queda determinada (salvo la multiplicación por un elemento unitario en su producto) por la geometría de dichas álgebras (basta tomar como aplicación Φ, de una C*-álgebra A en sí mismo igual, la identidad y suponer la posibilidad de que existan en A dos productos distintos). Además F conserva productos triples de la forma aa^*a. De donde utilizando la identidad de polarización se tiene que F conserva el producto triple.

El teorema de Kadison era extendido por Alan L. T. Paterson (1944-) y Allan M. Sinclair (siglo XX-) en 1972 al caso no unital, pero donde ahora el elemento unitario pertenece al álgebra de multiplicación de la C*-álgebra de llegada (ver [220]). Hemos de decir que previamente, en 1969, Harris (ver [135, Theorem 4, pag. 58]), obtenía una extensión del teorema de Kadison; considerando isometrías lineales sobreyectivas entre subespacios autoadjuntos, cerrados para la topología de la norma y para la operación paso al cuadrado, de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert complejo, es decir, entre JC*-álgebras. De hecho Harris establece que: toda isometría lineal sobreyectiva entre JC*-álgebras que conserve la unidad, ha de ser un $*$-isomorfismo. Por consiguiente el teorema de Harris debe ser considerado como un precedente al teorema de Paterson-Sinclair, anteriormente aludido, y al de Wrigth-Youngson, que recordamos a continuación.

Como hemos visto anteriormente, en 1978 Wrigth y Youngson probaban que *las isometrías lineales sobreyectivas entre JB*-álgebras unitales, que conservan la unidad, coinciden con los* $*$*-isomorfismos entre las mencionadas álgebras*. Lo que, en particular, da que *la estructura algebraica de toda JB*-álgebra unital queda determinada por su geometría* (fijada la norma y la estructura lineal, la involución y el producto son únicos). Además una tal isometría conserva el producto triple.

Por otra parte Harris, en en [136, pag. 18 y Theorem. 4], probaba que las isometrías lineales sobreyectivas entre J*-álgebras coinciden con los isomorfismos. Resultado que, al igual que los teoremas de Kadison y Wrigth-Youngson, constituyen un caso particular del siguiente teorema debido a Kaup, el cual muestra que el ambiente apropiado para establecer el Teorema de Banach-Stone es el de los JB*-triples.

Teorema de Kaup-Banach-Stone. *Toda isometría lineal sobreyectiva entre JB*-triples es un isomorfismo.* (Ver [167, Proposition 5.5] o [60, theorem 3.1.7]).

Queremos reseñar que el resultado anterior mejora el teorema de Wrigth-Youngson en el sentido de que no es necesario imponer que la isometría conserve la unidad para concluir que es un $*$-isomorfismo. Como hemos referido anteriormente, el teorema de Kadison es también un caso particular, como bien puede comprobar el lector acudiendo a [72, pag. 416].

Finalmente, si se tiene en cuenta que *todo isomorfismo entre JB*-triples es una isometría* (ver [170, Proposition 5.5], o [146, Proposition 2.4], o [60, theorem 3.1.20]), podemos afirmar que *las isometrías lineales sobreyectivas entre JB*-triples coinciden con los isomorfismos*. Lo que en particular da que:

Teorema de Kaup-B. *En todo JB*-triple la estructura algebraica determina la norma y recíprocamente*

Es decir si E es un JB*-triple entonces cualquier otra norma sobre E bajo la cual E es un JB*-triple ha de coincidir con la original, y si fijamos la estructura de espacio de Banach en E, cualquier triple producto sobre E que haga que E sea un JB*-triple, coincide con el previo. Una bella cualidad que realza la importancia de la consideración de los JB*-triples. Por otra parte ya que el producto binario en una C*-álgebra o JB*-álgebra determina el triple producto que la convierte en JB*-triple, se deduce de lo anterior que la estructura algebraica determina la norma en una tal álgebra.

Además ya que toda C*-álgebra conmutativa unital es una JB*-álgebra unital y en este caso, el producto binario así como la involución quedan determinados por el producto triple, podemos asegurar igualmente que la geometría determina la estructura algebraica en tales álgebras. Propiedad que sigue siendo cierta para el caso no unital, pasando a la unitización.

Finalmente me gustaría llamar su atención acerca de que el Teorema de Kaup-B representa una insospechada extensión del hecho, conocido por Gauss, de que la estructura algebraica y la geometría de los números complejos están mutuamente determinadas. Algo que bien conocen los alumnos que siguen un curso elemental de variable compleja.

La prueba que Kaup ofrece acerca del hecho de que, toda isometría lineal sobreyectiva entre JB*-triples ha de ser un isomorfismo, se basa en la visión holomórfica de los JB*-triples. Por tanto depende de la teoría de la holomorfía infinito-dimensional y en particular de toda una maquinaria desarrollada por él mismo y por Upmeier, sobre la mencionada teoría, contenida en los trabajos [164] y [283], respectivamente. En 1990 T. Dang (siglo XX-), Friedman y Russo (ver [72]) presentan una prueba alternativa que ellos mismos definen como: "elemental en el sentido de que utiliza únicamente propiedades simples de la geométrica afín de la bola unidad de un JB*triple junto a los análogos instrumentos algebraicos teóricos de teoría de operador estándar (descomposiciones espectral, polar y de Jordan; biduales, y un Teorema de Effros)". Hemos de decir que la mencionada prueba evita casi toda la maquinaria de holomorfía infinito-dimensional, como propiamente reconocen sus autores.

Nuestra caracterización geométrica de los tripotentes en un JB*-triple que hemos presentado anteriormente, nos permite dar una prueba del Teorema de Kaup-Banach-Stone, fácilmente asequible, en la que solo se utilizan, como principales herramientas, los hechos básicos que exponemos a continuación. A efectos de su mejor comprensión recordemos que un *JBW*-triple* es un JB*-triple E que es dual de un espacio de Banach E_*, conocido como el espacio predual de E. Se conoce que E_* es único y que el producto en E es separadamente w^*-continuo (ver [23], [194] y [146, Theorem 3.21]).

(1). *El bidual E'' de un JB*-triple E es un JBW*-triple y la inmersión canónica de E en E'' es un monomorfismo isométrico. Por consiguiente el producto triple en E'' es una extensión del producto triple en E.* (ver [77]).

(2). *El conjunto de las combinaciones lineales finitas de tripotentes*
ortogonales dos a dos, en un JBW-triple E es denso en E.* (ver [146, Lemma 3.11]).

El lector queda invitado a establecer la prueba teniendo en cuenta que si ϕ es una isometría lineal entre dos JB*-triples, entonces, gracias al Teorema de Hahn-Banach, su bi-traspuesta (ver si acaso [247, pag. 95]) es una isometría lineal entre sus biduales. Luego, gracias a (1), podemos suponer que los JB*-triples son JBW*-triples. Por otra parte ϕ conserva la ortogonalidad entre tripotentes (ver [96, Teorema 3.2.1] o [97, Therem 2.2]).

Me gustaría resaltar que la geometría de la bola unidad de un JB*-triple permite determinar su estructura algebraica. En particular en el caso de C*-álgebras, la geometría de su bola unidad determina las estructuras no asociativas que subyacen dentro ella. Por consiguiente las propiedades de los "objetos físicos" que representan, quedan determinadas por la referida geometría.

Finalmente quiero hacerles ver que el Teorema de Kaup-B (y por tanto el Análisis Funcional) puede servir para invitar a geómetras y algebristas a establecer un "pacto" acerca de la veracidad de la afirmación: *la Geometría es Álgebra*; y acabar con una vieja discusión que se recrudece cada vez que hay que realizar un Plan de estudios. Lo cual ocurre, por desgracia, en nuestro País con demasiada frecuencia.

6 Agradecimientos

En primer lugar deseo expresar mi más emocionado recuerdo a mis padres por la formación que me dieron. Mi padre fue mi maestro y además mi profesor de matemáticas hasta tercero de Bachillerato. Tuvo que vérselas con la irrupción de la visión "burbaquista" de las matemáticas que presentaban los avanzados libros de texto, seguidos por el prestigioso Instituto Padre Suárez de Granada. Como pueden imaginar yo estaba obligado a resolver todos los ejercicios propuestos, y no resueltos, en los mencionados textos. La ayuda prestada por mi hermano mayor Ángel (también maestro) a través de cartas por correo, fue inestimable. Desgraciadamente hoy ya no puedo disfrutar de su enorme cariño y no menos preparación cultural.

Dado que las matemáticas utilizan un lenguaje universal, siempre las he considerado como el mejor medio para estrechar relaciones y cultivar amistades, independientemente de las barreras idiomáticas, culturales, religiosas, etc. De hecho pienso que se debía insistir sobre este aspecto de las matemáticas que he venido practicando a lo largo de los años. En los años de la Licenciatura tuve la suerte de compartir estas ideas, y por consiguiente trabajo, con varios compañeros entre los que quiero citar a Agustín Muñoz Vazquez, Luis Parras Guijosa, Antonio Pascual Acosta y Javier Pérez González. Gracias queridos amigos por vuestra ayuda.

Quiero manifestar un especial reconocimiento a mi Maestro el Profesor Angel Rodríguez Palacios y a mis discípulos los profesores Miguel Cabrera Garcia, Antonio Miguel Peralta Pereira y a Francisco José Fernández Polo, por permitirme compartir junto a ellos muchos años de trabajo en los que hemos tenido la suerte de presenciar el alumbramiento de nuevos hechos matemáticos, con similar sensación a la que se puede sentir ante la presencia del nacimiento de un río de su fuente. Gracias compañeros y sobre todo gracias por brindarme vuestra amistad. También deseo agradeceros la ayuda prestada en la elaboración de este discurso. Agradecimiento que quiero hacer extensivo a los compañeros, y sobre todo amigos, los profesores Jerónimo Alaminos Prats y Juan Francisco Mena Jurado.

Nadie mejor que los matemáticos de nuestra generación y anteriores conoce las dificultades que teníamos para acceder a las referencias bibliográficas. El disponer del servicio que hoy tenemos en la Facultad de Ciencias, y sobre todo de la diligencia del personal que lo atiende, me ha sido muy útil e imprescindible en la confección de este discurso. Gracias a todos ellos y a la Secretaria del Departamento de Análisis Matemático Elisa Román Palomino, por la colaboración prestada.

Si mis padres me dieron la vida y educación, mi esposa e hijos han hecho posible mi carrera matemática. Su paciencia, resignación y comprensión ante mi silencio, propio de la abstracción que sufre todo matemático, a muchas de sus preocupaciones o simplemente conversaciones, refleja el cariño que me profesan. Su apoyo en los momentos de dificultad ha sido definitivo para continuar mi carrera universitaria que el “optimista” del Profesor Fuentes la definía como “una carrera de obstáculos hacia la miseria". Claro está, él se refería al aspecto económico. Hoy pienso que no le faltaba razón. Gracias Tere, Juan y Teresa.

Gracias a todos por su atención.

Bibliografía

[1] N. H. Abel; Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen, Crelle's Journal, Vol. 1, (1826) 65-84.

[2] C. A. Akemann and N. Weawer; Geometric characterizations of some classes of operators in C*-algebrasand von Neumann algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 130, (2002) 3033-3037.

[3] A. A. Albert; On a certain algebra of quantum mechanics, Ann. of Math., 35, (1934) 65-73.

[4] A. A. Albert; Power-associative rings, Trans. Amer. Math. Soc., 64, (1948) 552-593.

[5] E. M. Alfsen, F. W. Shultz and E.Stormer; A Gel'fand-Neumark theorem for Jordan algebras, Adv. Math., 28, (1978) 11-56. (Preprint Series, Matematsk Institutt, Universitetet i Oslo, Math. Nº 19, (1975)).

[6] R. Alicki and M. Fannes; Quantum Dynamical Systems, Oxford University Press Inc., New York, 2001.

[7] W. Ambrose; Structure theoems for a special class of Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 57, (1945) 364-386.

[8] G. R. Allan, Some simple proofs in holomorphic spectral theory, Perspectives in operator theory, 9-15, Banach Center Publ., 75, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2007.

[9] G. R. Allan, Introduction to Banach spaces and algebras. Prepared for publication and with a preface by H. Garth Dales. Oxford Grad Texts in Mathematics, 20. Oxford University Press, Oxford, 2011.

[10] K. Alvermann and G. Janssen; Real and complex non-commutative Jordan Banach algebras, Math. Z., 185, (1984) 105-113.

[11] H. Araki and G. A. Elliott; On the definition of C^*-algebras, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 9, (1973/74) 93-112.

[12] H. Araki and R. V. Kadison; C*-algebras and Applications to Physics, Proceeding, Second Japan-USA Seminar, Los Angeles, April 18-27, 1977, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1978.

[13] R. B. Ash; Complex variables, Academic Press, New York and London, 1971.

[14] G. Assayag, H.G. Feichtinger and J.E. Rodrigues (editores); Mathematics and Music. Berlin, Springer, 2002.

[15] B. Aupetit; The uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and Banach Jordan algebras, J. Funct. Anal., 47, nº 1, (1982) 1-6.

[16] B. Aupetit; Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, Lecture Notes in Mathematics, 735, Springer-Verlag, New York, 1979.

[17] B. Aupetit; A Primer on Spectral Theory, Springer-Verlag, New York, Inc., 1991.

[18] W. G. Bade and P. G. Curtis; The Wedderburn Decomposition of Commutative Banach Algebras, American J. Math, 82, nº4, (1960) 851-866.

[19] S. Banach; Theorie des Operations Lineaires, Warsaw, 1932.

[20] S. Banach and A. Tarski; Sur la decomposition des ensembles de points en paties respectivemente congruentes, Fundamenta Mathematicae 6, (1924) 244-277.

[21] H. Barendregt; The Lambda Calculus. Second Edition: Its syntax and semantics; North-Holland, Amsterdam-New York, 1985.

[22] H. Barendregt and E. Barendsen; Introduction to Lambda Calculus; Revised edition, October 1994.

[23] T. Barton and R. M. Timoney; Weak*-continuity of Jordan triple products and its applications, Math. Scand., 59, (1986) 177-191.

[24] H. Behncke; Hermitian Jordan Banach algebras, J. London Math. Soc., (2), 20, (1979) 327-333.

[25] B. Belhoste Augustin-Louis Cauchy. A biography. Springer, New York, 1991.

[26] E. T. Bell; Men of Mathematics, Pub. Simon and Schuster, New York, 1986.

[27] S. K. Berberian; Lectures in Funtonal Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, New York, Inc., 1976.

[28] E. Berkson; Some characterizations of C*-algebras, Illinois J. Math, 10, (1966) 1-8.

[29] L. Bing-Ren; Introduction to Operator Algebras, Wold Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1999.

[30] G. Birkchoff and S. Mac Lane; A survey of Modern Algebra, Third Edition, The Macmillan Company, New York. London, 1965.

[31] V. M. Bogdan; On Frobenius, Mazur and Gelfand-Mazur theorems on division algebras, Quastiones Mathematicae, V^{o} 29, (2006) 171-209.

[32] H. F. Bohnenblust and S. Karlin; Geometrical properties of the unit sphere in Banach algebras, Ann. of Math. vol. 62, (1955) 217-229.

[33] F. Bombal; Paradojas y rigor: La historia interminable.Discurso leído en el acto de recepción como Académico de Número de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Febrero 2006.

[34] F. F. Bonsall; Jordan algebras spanned by Hermitian elements of a Banach algebra, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 81, (1977) 3-13.

[35] F. F. Bonsall and J. Duncan; Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras, London

Mathematical Society Lecture Note Series 2, Cambridge University Press, 1971.

[36] F. F. Bonsall and J. Duncan; Numerical ranges of operators II, London Mathematical Society Lecture Note Series 10, Cambridge University Press, 1973.

[37] F. F. Bonsall and J. Duncan; Complete Normed Algebras, Springer-Verlag, Berlin. 1973.

[38] G. Boolos; A proof of Gödel's incompleteness theorem. (Spanish) Translated from Notices Amer. Math. Soc. [36, (1989) 388-390, 676] by Carmelo Alonso Torres. Gac. R. Soc. Mat. Esp., 4, no. 3, (2001) 521-527.

[39] G. Boolos; Gödel's second incompleteness theorem explained in words of one syllable, Min, Vol.103. N°409 (jannuary 1994)1-3. Oxford University Press, 1994.

[40] C. B. Boyer; Historia de la matemática, versión de M. Martínez Pérez, Alianza Editorial, 2007.

[41] C. B. Boyer and U. C. Mezbach; A history of mathematics, third edition, Jhon Welly and Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2011

[42] O. Bratteli and D. W. Robinson; Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, Springer Verlag, New York, 1979.

[43] O. Bratteli and D. W. Robinson; Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, II, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 1979. 1981.

[44] R. B. Braun; Structure and representations of non-commutative Jordan algebras, Manuscripta Math., 41, (1983) 139-171.

[45] R. B. Braun; A Gelfand-Neumark theorem for C*-alternative algebras, Math. Z., 185, (1984) 225-242.

[46] R. Braun, W. Kaup, and H. Uprneier; A holomorphic characterization of Jordan C*-algebras, Math. Z., 161, (1978) 277-290.

[47] H. A. Bumstead and R. G. Van Name, Eds. The Scientific papers of J. Willaerd Giggs,in two volumes, Woodbrige, CT: Ox Bow Press, 1993.

[48] R. B. Burckel; An Introduction to Classical Complex Analysis Vol. 1, Birkhäuser, Stuttgart, 1979.

[49] M. Cabrera García and A. Rodríguez Palacios; Non-associative normed algebras: Volume 1 the Vidav-Palmer and Gelfand-Naimark theorems. En preparación, aparecerá en Editorial Cambridge University Press, Serie: Encyclopaedia of Mathematics and its Aplications.

[50] F. Cajori, A History of Mathematics, Fifth Edition, AMS Chelsea Pubblisching, Providence, Rhode Island, 1991.

[51] F. Cajori; A history of mathematics, The MacMillan Company, London, 1909.

[52] F. Cajori, A history of mathematics with hints on methods of teaching, The MacMillan Company, London. 1930.

[53] G. Cantor, R. Dedekind, Ed. por J. Cavallés y E. Nether; Briefwchsel: Cantor-Dedekind, Hermann, París, 1937.

[54] A. Cañada; Brook Taylor, Epsilon nº4, (1985) 104-111.

[55] E. Cartan, Sur les domaines bornéss homogènes de l'esplace de n variables complexes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11, (1935) 116-1620.

[56] A. L. Cauchy; Seconde note sur les racines imaginaires des équations, Bull. Soc., Philomat, París, (1817) 161-164.

[57] A. L. Cauchy; Sur les racines imaginaires des équations, Comptes Rendus Mathematique París, 11 (cahier 18), (1820) 411-416.

[58] A. L. Cauchy; Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris, Oeuvres (2) 15, (1974) 41-89.

[59] S. B. Chae; Holomorphy and Calculus in Normed Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1985.

[60] C.-H. Chu; Jordan structures in Geometry and Analysis, Cambridge Tracts in Mathematics, 190, Cambridge University Press, New York. 2012.

[61] C.-H. Chu and P. Mellon; Jordan structures in Banach spaces and symmetric manifolds. Exposition. Math., 16, no. 2, (1998) 157-180.

[62] A. Church; An unsolvable problem of Elementary Number Theory, Amer. J. of Mathematics, 58, nº.2, (1936) 345-363.

[63] L. Coe; Wireless Radio: A Brief History, Mcfarland and Co. Inc. Pub. 1996.

[64] P. J. Cohen; The independence of de Continuum Hypothesis, Proc. National Academy of Science, 50, (1963) 1143-1148; 51, (1964) 105-110.

[65] P. J. Cohen; Set Theory and the Continuum Hypotesis, W. A. Benjamin, ICN. Readiong, Massachusetts, 1966.

[66] J. B. Conway; Funtions of one Complex Variable, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokio, 1984.

[67] R. Courant and D. Hilbert; Partial Diferential Equations., Vol 2, John Wiley and Sons, Inc., 1989.

[68] H. G. Dales; A discontinuous homomorphisms from C(X), Amer. J. of Math. Vol 101, nº 3, (1979) 647-734.

[69] H. G. Dales; Banach algebras and Automatic Continuity, London Mathematical Society Monograpfs. New Series. 24, Oxford University Press Inc., New York, 2000.

[70] H. G. Dales and J. Esterle; Discontinuous homomorphisms from C(X), Bull. Amer. Math. Soc. Vol.83, nº2, (1977) 257-259.

[71] H. G. Dales and H. Woodin; Martin´s Axiom, pp. 80-103. An Introduction to Independence for Analysts, London Mathematical Society Lecture Notes Series. 115, Cabridge University Press, 1987.

[72] T. Dang, Y. Friedman and B. Russo; Affine geometric proofs of the Banach Stone Theorems of Kadison and Kaup, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 20, nº2, (1990)

[73] H. Darmon, F. Diamond,and R. Taylor; Fermat's last theorem. Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 2-140, Int. Press, Cambridge, MA, 1997.

[74] J. W. Dauben; Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the infinite. Princenton University Press,, 1990.

[75] R. H. Dehmke; On flexible algebras, Ann. of Math., 85, (1958) 211-230.

[76] J. Diestel; Sequences and Series in Banach Espaces, Springer-Verlag, New York, Inc., 1984.

[77] S. Dineen; The second dual of a JB*-triple system. Complex analysis, Functional Analysis and Approximation Theory (Campinas, 1984), 67-69, North-Holland Math. Stud., 125, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[78] J. Dixmier; Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann). Deuxième édition, revue et augmentée. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1969.

[79] J. Dixmier; Les C^*-algèbres et leurs représentations. Deuxième édition. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1969.

[80] G. Domokos and S. Kövesi-Domokos; The algebra of color, J. Mathematical Phys., 19, (1978) 1477-1481.

[81] R. S. Doran (Editor); C*-algebras: 1943-1993, A Fifly Year Celebration, Contemporary Mathematies, Vol. 167 (Amer. Math. Soc.), Providence, 1994.

[82] R. S. Doran and V. A. Belfi; Characterizations of C^*-algebras: The Gelfand-Naimark theorems, Marcel Dekker, New York and Basel, 1986.

[83] P. Dubreil, M.I. Dubreil-Jacotin; Lecciones de Algebra Moderna. Ed.Reverté, 1971.

[84] J. Duncan; The elements of complex analysis, John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, 1968.

[85] N. Dunford; Spectral operator, Pacific J. Math., 4, (1954) 321-354.

[86] O. E. Dunlap; Radio´s 100 mens of science; biografical narratives of pathfinders in electronics and television. Harper and brothers, New York and London, 1994.

[87] H.-D.Ebbinghaus, H. Hermes, F.Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel and R. Remmert; *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 123, Springer-Verlag, New York, 1990.

[88] R. E. Edwards; Multiplicative norms on Banach algebras, Pro. Cambridge Phil. Soc. 47, (1951) 473-474.

[89] C. M. Edwards and G. T. Rüttimann; On the facial structure of the unit balls in a JBW*-triple and its predual, J. London Math. Soc., 38, Ser.(2), (1988) 317-332.

[90] J. Esterle; Discontinuous homomorphisms from C(X), Spectral Theory, Banach Center Publications; Vol.8, PWN-Polish Scientific Publishers. Warsaw. 1982.

[91] J. Esterle; Kaplansky's and Michael's problems: A survey, Ann. Funt. Anal. 3, nº 2, (2012) 66-88

[92] Euclides. Elementos. Obra completa. Madrid: Editorial Gredos. ISBN 978-84-249-1463-9. 1. Volumen I: Libros I-IV. 1991. ISBN: 978-84-249-1464-6. 2. Volumen II: Libros V-IX. 1994. ISBN: 978-84-249-1640-4. 3. Volumen III: Libros X-XIII. 1996. ISBN: 978-84-249-1830-9.

[93] D. R. Farenick; Algebras of Linear Transformations, Springer-Verlag New York, Inc., New York, Berlin, Heidelberg, 2001.

[94] S. Feferman (Editor-in-chief); Kurt Gödel, Collected works, Volume I, Oxford University Press. New York, Oxford, 1986.

[95] S. Feferman (Editor-in-chief); Kurt Gödel, Collected works, Volume II, Oxford University Press. New York, Oxford. 1990.

[96] J. F. Fernandez-Polo; Aspectos Geométricos en la Teoría de los JB*-triples reales y complejos, Tesis doctoral, Universidad de Granada, Depósito Legal GR-1943/2006. ISBN: 84-338-3925-X.

[97] J. F. Fernández-Polo, J. Martínez Moreno and A. M. Peralta; Geometric characterization of tripotents in real and complex JB^*-triples. J. Math. Anal. Appl. 295, no. 2, (2004) 435-443.

[98] Filóstrato Flavio; Vida de Apolonio de Tiana, Editorial Gredos, Madrid, 1992. ISBN 978-84-249-3522-1.

[99] A. Fraenkel; Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Math. Ann., t. LXXXVI, (1922) 230-237.

[100] J. B. Fraleigh; A first course in abstract algebra, Addison Wesley Pub. Comp., 2002.

[101] Y. Friedman; Bounded symetric domains and the JB*-triple Structure in Physics, Jordan Algebras, Proceeding of Conference help in Oberwolfach, Germany, Walter de Gruver, (1994) 61-82.

[102] Y Friedman; Physical application of homogeneous balls, with the assistance of Tzvi Scarr. Progress in Mathematical Physics, 40, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Ma, 2005.

[103] Y. Friedman and A. Naimark; The homogeneity of the ball in $\mathbb{R}^3$ and special relativity, Found. Phys. Lett., 5, no. 4, (1992) 337-354.

[104] Y. Friedman and B. Russo; Contractive projections on operator triple systems, Math. Scand., 52, (1983) 279-311.

[105] Y. Friedman and B. Russo; Solution of the contractive projection problem, J. Funct. Anal., 60, (1985) 56-79.

[106] Y. Friedman and B. Russo; Structure of the predual of a JBW*-triple, J. Reine Angew. Math., 858, (1985) 67-89.

[107] Y. Friedman and B. Russo; The Gelfand-Naimark Theorem for JB*-triples, Duke Math. J., 53, (1986) 139-148.

[108] Y. Friedman and B. Russo; A new approach to spinors and some representations of the Lorentz Group on them; Foundations of Physics, Vol. 31, No. 12, (2001) 1733-1766.

[109] F. G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84, (1878) 1-63.

[110] F. G. Frobenius; Gesammelte Abhandlungen. Bäden I, II, III. Publicados por *von J. P. Serre*, Springer-Verlag, Vol. I, Berlin-New York, 1968.

[111] M. Fukamiya; On a theorem of Gelfand and Naimark and B*-algebra, Kukamoto J. Sci. Ser. A. 1, (1952) 17-22.

[112] F. Gaillarg, FE. Gaillarg and M. Guillaume; Fondeman des mathématiques, Paris: l'Harmatan, 2001.

[113] J. J. Garcés Pérez; Operadores que preservan ortogonalidad y homomorfismos ternarios, Tesis doctoral, julio 2013, Universidad de Granada. Pendiente de publicación

[114] M. I. Garrido y J. A. Jaramillo; Variations on the Banach-Stone Theorem, Extracta Mathematicae, Vol. 3, (2002) 351-383.

[115] C. F. Gauss; Theoria attractions corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata, Werke, Bd. V, (1877) 5-7.

[116] I. M. Gelfand, On normed rings, Dskl. Akad. Nauk S.S.S., Nº 23, (1939) 430-432.

[117] I. M. Gelfand; Normite Ringe, Rec. Math. (Mat. Sbornik) 9, (51), (1941) 1-23.

[118] I. M. Gelfand and M. A. Naimark; O the embedding of normed rins into the ring of operators in Hilbert spaces, Mat. Sbornik, 12, (1943) 197-213.

[119] I.M. Gelfand, D.A. Raikov and G.E. Shilov; Commutative normed rings, Uspekhi Mat. Nauk, 1, (1946), 48-146. AMS Transl. 5 (1957), 115-220.

[120] H. Georgi; Lie algebras in particle physics, Second Edition, Westriew Press, 1999.

[121] C. M. Glennie; Some identities valid in special Jordan algebras but no valid in all Jordan algebras, Pacific J. Math., 16 (1966) 47-59.

[122] B. W. Glickfeld; A metric characterization of C(X) and its generalization to C*-algebras, Illinois J. Math. 10, (1966) 547-556.

[123] J. G. Glimm and R. V. Kadison; Unitari operators in C*-algebras, Pacific J. Math., Vol.10, Nº2, (1960) 547-556.

[124] K. Gödel, Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathernatica und verwant der Systeme, I, Monatshefte Math. Phys., 38, (1931) 173-198.

[125] K. Gödel; Literaturberichte: Philosophie der Logik und Arithmetik. (German) Monatsh. Math. Phys. 39, no. 1, A3. (1932).

[126] K. Gödel; Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 25, (1939) 220-224.

[127] K. Gödel; The consistency of the axiom of the choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, Annals of Math. Studies Nº3, Princenton (1940) 66 pp.

[128] K. Gödel; Obras completas (Introducción y traducción de J. Mosterin), Alianza Universidad, Madrid, 1989.

[129] K. R. Goodeal; Notes on real and complex C*-algebras, Birkhauser, Boston, 1982.

[130] G. Green; The mathematical papers of George Green, Edited by N. M. Ferrers, New York-Chelsea, 1970.

[131] D. Guedlj; El teorema del loro, Trad.: C. Serra. Edt. Anagrama, S. A. Barcelona, 2000.

[132] M. Hallett; Cantoriana set theory and limitation of size, Clarendon Press. Oxford, 1984.

[133] H. Hanche-Olsen and E. Stömer; Jordan operator algebras, Monographs and Studies in Mathematics 21, Pitman, London-Boston-Melbourne, 1984.

[134] Harish-Chandra; Representations of semisimple Lie groups. VI. Integrable and square-integrable representations; Amer. J. Math., 78, (1956) 564-628.

[135] L. A. Harris, Schwarz's Lemma and the maximal principle in infinite dimensional spaces, Cornell University, Ph.D. Thesis,1969.

[136] L. A. Harris; Bonded Symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces, Lectures Notes in Math. 364, pp. 13-40, Springer-Verlag , Berlin, 1974.

[137] L. A. Harris; Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces. Advances in holomorphy (Proc. Sem. Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), pp. 345-406, North-Holland Math. Stud., 34, North-Holland, Amsterdam-New York, 1979.

[138] L. A. Harris; A generalization of C*-algebras; Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 42, (1981) 331-361.

[139] O. Heaviside; Electromagnetic Theory; Edt. Dover, New York, 1950.

[140] S. Helgason; Differencial Geometry and Symetric Spaces, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1962.

[141] S. Helgason; Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[142] H. Herrlich; Axioma of Choice, Lecture Notes in Mathematics 1876, Springre-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[143] H. Hertz; Las ondas electromagnéticas, Traducción, notas y apendices: M. García y X. Roqué, Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, 1989.

[144] D. Hilbert and P.Bernays; Grundlagen der Mathematik. I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol.40, Berlin, New York: Springer-Verlag. 1934.

[145] D. Hilbert and P.Bernays; Grundlagen der Mathematik. II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol.50, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1939.

[146] G. Horn; Characterization of the predual and ideal structure of a JBW*-triple, Math. Scand., 61, (1987) 117-133.

[147] R. Iordanescu; Jordan structures in Analysis, Geometry and Physics, Editura Academiei Române, Bucharest, 2009.

[148] J. M. Isidro, W. Kaup and A. Rodríguez; On real forms of JB*-triples, Manuscripta Math., 86, (1995) 311-335.

[149] J. M. Isidro and L. L. Stachó; Holomorphic automorphism groups in Banach spaces: an elementary introduction, (North-Holland Mathematics Studies, 105), Mathematical Notes, Nº 97, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[150] C. Ivorra; Las fórmulas de Cardano-Ferrari, (`http://www.uv.es/ivorra`).

[151] N. Jacobson; The radical and semi-simplicity for rabitrary rings, Amer. J. Math., 67, (1945) 300-320.

[152] N. Jacobson; Structure and representation of Jordan algebras, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. nº 39, Providence 1968.

[153] B. E. Johnson; The uniqueness of the (complete) norm topology, Bull. Amer. Math. Soc., 73, (1967) 537-539.

[154] P. Jordan, J. von Neumann and E. P. Wigner; On a Algebraic Genaralization of Quantum Mechanical Formalism, Annals of Matematics, 35, (1934) 29-64.

[155] R. V. Kadison, Isometries of Operator Algebras, Ann. of Math. 54, (1951) 325-338.

[156] R V. Kadison and J. R. Rigrose; Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol. 1, Elementary theory, Academic Press, New York, 1983.

[157] A. Kaidi, A. Morales and A. Rodriguez; Prime noncommutative JB*-algebras, Bull. London. Math. Soc. 32, (200) 703-708.

[158] A. Kaidi, A. Morales and A. Rodriguez; Non-associative C*-algebras revisited. In Recents Progress in Functional Analysis, Proccedings of the International Functional Analysis Meeting on the Occasion of the 70th Birthday of Professor Manuel Valdivia, Valencia, Spain, July 3-7, 2000 (Ed. K. Bierstedt, J. Bonet. M. Maestre and J. Schmets), 379-408, Norh Holland Math. Studies 189, Elsevier, Amsterdam, 2001.

[159] E. Kaniuth; A curse in commutative Banach algebras, Springer Science+Business Media, New York, 2009.

[160] I. Kaplansky; Normed Algebras, Duke Math. J. 16, (1949) 399-418.

[161] I. Kaplansky; Topológical algebra, Publ. Inst, de Mat. Rio de Janeiro, 1959.

[162] I. Kaplansky; Algebraic and analytic aspects of operator algebras, Regional Conference Series in Mathematics, nº 1, Providence, Amer. Math. Soc., 1970.

[163] E. Kasner and J. R. Newman; Mathematics and the Imagination, British Edition first publihed 1940, Reprint 1950. Printed in Great Britain by Jorrold and Sons Limited, Norwich.

[164] W. Kaup; Algebraic Characterization of Symmetric Complex Banach Manifolds, Math. Ann., 228, (1977) 39-64.

[165] W. Kaup: Über dieKlassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension. I. Math. Ann. 257, (1981) 463-486.

[166] W. Kaup; Bounded symmetric domains in complex Hilbert spaces, Symposia Math., 26, (1982) 11-21.

[167] W. Kaup; A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces. Math. Z. 183, (1983) 503-529.

[168] W. Kaup: Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension. II. Math. Ann. 262, (1983) 57-75.

[169] W. Kaup Contractive projections on Jordan C*-algebras and generalizations, Math. Scand., 54, (1984) 95-100.

[170] W. Kaup; Bounded symmetric domains and derived geometric structures, Rend. Mat. Acc. Lencei, s.9, vol. 13, (2002) 243-257.

[171] W. Kaup and H. Upmeier; Banach spaces with biholomorphically equivalent unit balls are isomorphic, Proc. Amer. Math. Soc., 58, (1976) 129-133.

[172] F. Keithley; The story of electrical and magnetic measurements: from 500 BC to the 1940s,Edi. John Wiley and Sons, New York, 1999.

[173] J. L. Kelley and R. L. Vaught; The positive cone in Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 74, (1953) 44-55.

[174] S. C. Kleene; A Theory of Positive Integers in Formal Logic. Part. I, Amer. J. of Mathematics, 57, nº 1, (1935) 153-173.

[175] S. C. Kleene; A Theory of Positive Integers in Formal Logic. Part. II, Amer. J. of Mathematics, 57, nº.2, (1935) 219-244.

[176] S.C. Kleene; λ-definability and recursiveness, Duke Math. J. Vol.2, nº 2, (1936) 340-353.

[177] M. Kisin; Moduli of finite flat group schemes, and modularity. Ann. of Math. (2) 170 (2009), no. 3, 1085-1180.

[178] S. C. Kleene; Introduction to metamathematics, North Holland, 1980.

[179] M. Kline; Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Vols. 1, 2, 3, Oxford University Press, 1972.

[180] M. Koecher; An elementary approach to bounded symmetric domains, Lecture Notes, Rice University, 1969.

[181] R. Larsen; Banach Algebras, an introduction; Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[182] R. A. Lewin; Teoria Axiomática de conjuntos (Versión preliminar). Dirección postal: Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas, Casilla 306-Correo 22. Santiago de Chile. e-mail: rlewin@mat.puc.cl.

[183] L. R. Liboff; Introductory Quantum Mechanics, Addison-Wesley Company. Inc., New York, Ontario, 1980.

[184] G. Lindblad; On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups, Commun. math. Phys., 48, (1976) 119-130.

[185] O. Loos; Symmetric Spaces I/II, W. A. Benjamin, Inc. New York-Amsterdam. 1969.

[186] O. Loos; Jordan pairs, Lecture Notes Math. 460, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[187] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, Lecture Notes, University of California Irvine, 1977.

[188] E. R. Lorch; The theory of analytic funtions in normed abelian vector rings, Trans. American Math. Soc. 54, (1943), 414-25.

[189] G. Lumer; Semi-inner-product spaces; Trans. Amer. Math. Soc. 100, (1961) 29-43.

[190] P. Mancosu (editor); From Brouwer To Hilbert. The debate on the Foundations of Mathematics in the 1920‘s. New York, Oxford University Press, 1998.

[191] J. Martínez; Sobre álgebras de Jordan normadas completas, Tesis doctoral, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada. Un.Gr.40.77.04, Granada, 1977.

[192] J. Martínez; JV-álgebras, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 87, (1980) 47-50.

[193] J. Martínez, A. Mojtar and A. Rodriguez; On a nonassociative Vidav-Palmer Theorem, Quart. J. Math. Oxford (2), 32, (1981) 435-442.

[194] J. Martínez and A. M Peralta; Separate weak*-continuity of the triple product in dual real JB*-triples, Math. Z., 234, (2000) 635-646.

[195] J. C. Maxwell; A dynamical theory of the electromagnetic field, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155, (1865) 459-512.

[196] J. C. Maxwell; Electricity and Magnetism; Third Edition, Vol. 1, Oxford University Press, London, 1904.

[197] S. Mazur; Sur les anneaux linéeries, Comptus Rendus Acad. Sci. Paris, 207, (1938) 1025-1027.

[198] K. McCrimmon; Norms and nonconmmutative Jordan algebras, Pacific J. Math. Vol.15, nº3, ,(1965) 925-956.

[199] K. McCrimmon; Structure and representation of noncommutative Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 121, (1966) 187-199.

[200] K. McCrimmon; The radical of a Jordan algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 62, (1969) 671-678.

[201] K. McCrimmon; Noncommutative Jordan rings, Trans. Amer. Math. Soc. 158 (1971) 1-33.

[202] K. McCrimmon; A Taste of Jordan Algebras, Springer-Verlag, New York, Inc., 2004.

[203] K. McCrimmon; Norms and nonconmmutative Jordan algebras, Thesis (Ph:D.)-Yale University, UMI Dissertations Publishing, 1965.

[204] K. McCrimmon and R. D. Schafer; On a class of nonconmutative Jordan algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 56, (1966) 1-4.

[205] K. Meyberg; Lectures on algebras and triple systems, University of Virginia, Lecture Notes, Charlottesville, VA, 1972.

[206] A. Mojtar Kaidi; Bases para ua teoría de las álgebras no asociativas normadas, Tesis doctoral, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada, Granada 1978.

[207] G. J. Murphy; C^*-algebras and operator theory. Academic Press, Inc., Boston, MA. 1990.

[208] E: Nagel y J.R. Newman; El Teorema de Gödel. Tecnos. Madrid, 1994.

[209] M. Nagumo; Einige analytische Untersuchangen in linearen metrichen Ringen, Japan J. Math. 13, (1936) 61-80.

[210] M. A. Naimark; Normed Rings, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.

[211] M. A. Naimark; Normed Algebras, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

[212] J. D. Newburgh; The variation of spectra, Duke Math. J., 18, (1951) 165-176.

[213] T. Ono; Note on a B*-álgebra, J. Math. Japan, 11, (1959) 146-158.

[214] T. Ono; Note on a B*-álgebra II, Bull. Nagoya Instr. Tech., 21, (1969) 93-95.

[215] M. V. Ostrogradskiĭ; Note sur la théorie de la Chaler; Mem. de l'Acad. de St. Petersburg, 1, (1831) 123-138, (Presented in 1828).

[216] T. W. Palmer; Characterizations of C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 74, (1968) 538-540.

[217] T. W. Palmer; Characterizations of C*-algebras II, Trans. Amer. Math. Soc., 148, (1970) 577-588.

[218] T. W. Palmer; Banach algebras and the general theory of $*$-algebras, Volume I, algebras and Banach algebras. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 49, Cambridge University Press, 1994.

[219] T. W. Palmer; Banach algebras and the general theory of $*$-algebras, Volume II, $*$-algebras. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 79, Cambridge University Press, 2001.

[220] A. L. Paterson and A. M. Sinclair, Characterization of isometries between C*-algebras, J. London Math. Soc., (2), 5, (1972) 755-761.

[221] S Patrick; Aximatic Set Theory, Dover, 1972.

[222] J. Pawlikouski; The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox, Fundamenta Mathematicae, 138, (1991) 21-22.

[223] R. Payá, J. Perez and A. Rodriguez; Non-commutatine Jordan C*-algebras, Manuscripta Math., 37, (1982) 87-120.

[224] R. Payá, J. Perez and A. Rodriguez; Type I factor representations of non-commutative JB*-algebras, Proc. London Math. Soc., 48, (1984) 428-444.

[225] J. Peano; Los Principios de la Aritmética. Expuestos según un nuevo método . Edición bilingüe por Julián Velarde. Clásicos El Basilisco. Edit. Pentalfa. Oviedo, 1979.

[226] G. K. Pedersen; C*-algebras and their automorphism groups, Academic Press, 1979.

[227] A. M. Peralta; Sobre JB*-triples reales, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Depósito Legal B-15225/2001 ISBN: 84-338-2746-4.

[228] F. J. Pérez; C*-álgebras asociativas y C*-álgebras de Jordan un tratamiento unificado, Tesis doctoral, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada, Un.Gr.58.1980, Granada, 1980.

[229] N. C. Phillips, Continuous-trace C*-algebras not isomorphic to their opposite algebras, Internat. J. Math., vol. 12, (2001) 263-275.

[230] C. A. Pickover; El libro de las matemáticas, Librero b. v. 2011. Prod. Edi. española: Cillero y de Mota Traduction. Trad: M. Serrano, S. Saura y J. Loste.

[231] H. Poincaré; Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme, Ren. Circ. Mat. Palermo, 23, (1907) 185-220.

[232] V. Ptak; Banach algebras with involution; Manuscripta Math., 6, (1972) 245-290.

[233] T. J. Ransford; A short proof of Johnson's uniqueness of norm theorem, Bull. London Math. Soc., 21, (1989) 487-488.

[234] T. J. Ransford; Potencial Theory in the Complex Plane, Cambrige University Press, 1995.

[235] R. Remmet; Theory of Complex Funtions, Translated by R. B. Burkel, Springer-Verlag, New York Inc., 1991.

[236] C. E. Rickart; The uniqueness of norm problem in Banach algebras, Annals of Mathematics, Vol.51, nº3, May, (1950) 615-628.

[237] C. E. Rickart; General Theory of Banach algebras, Robertr E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1974. (Original edition 1960,Van Nostrand Reinhold).

[238] R. Robert; A simpler proof of the commutative Glickfeld-Berkson theorem, J. London Math. Soc. (2) 2,(1970) 403-404.

[239] A. Rodríguez; A Vidav-Palmer Theorem for Jordan C*-algebras and related topics, J. London Math. Soc., (2), 22, (1980) 318-332.

[240] A. Rodríguez; Non-associative normed algebras spanned by hermitian elements, Proc. London Math. Soc., (3), 47, (1983) 258-274.

[241] A. Rodriguez; The uniqueness of complete norm topology in complete normed nonassociative algebras, J. Funct. Anal., 60, (1985) 1-15.

[242] A. Rodriguez; Jordan structures in Analysis. Jordan Algebras, Proccedings of the Conference held in Oberwolfach, Germany, Augoust 9-15, 1992 (Ed. W. Kaup, K. McCrimmon and H. P. Petersson), 97-186, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

[243] A. Rodríguez, Absolute-Valued Algebras, and Absolute-Valued Banach Spaces, Proc. of the firs international school,

Avance courses of Mathematical Analysis I Proc., Edts. A. Aizpuru and F. León, World Scientific, New Jersey, London, 2004.

[244] H. Rubin and J. E. Rubin; Equivalents of the Axiom Choice. Second Printin, Amsterdam-London: North Holland, 1970.

[245] H: Rubin and J: E. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice, II. North-Hollann. Amsterdam, 1985.

[246] W. Rudin; Principios de Análisis Matemático. Madrid: Ed. del Castillo, 1966.

[247] W. Rudin; Funtional Analysis, McGrau-Hill Inc., New York, 1991.

[248] W. Rudin; Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

[249] B. Russell; The Principles of Mathemamatics, W. W. Norton and Company, New York, 1996.

[250] B. Russo; Structure of JB*-Triples, in Jordan Algebras, Proc. Conference Oberwolfach 1992, Edts. W. Kaup, K. McCrimmon and H. P. Petersson, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.

[251] B. Russo and H. A. Dye; A note on unitary operator in C*-álgebras, Duke Mathematical Journal, 33, (1966) 414-416.

[252] S. Sakai; C*-algebras and W*-algebras, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[253] J. M. Sanchez Muñoz; Historia de las Matemáticas. Hamilton y Descubrimiento de los cuaterniones; Pensamient Matematic, Nº 1, Octubre (2011).

[254] I. Satake; Algebraic Structures of Symmetric Domains, Publ. of the Math. Soc. of Japan 14, Iwanami Shoten, Publishers and Princenton University Press, 1980.

[255] R. D. Schafer; Noncommutative Jordan algebras de characteristic 0, Proc. Amer. Math. Soc., (1955) 472-475.

[256] R. D. Schafer, An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, New York, 1966.

[257] I. E. Segal; Irreducible representations of operator algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 53, (1947) 73-88.

[258] I. E. Segal; Postulates for general quantum mechanics, Ann. of Math., 48, (1947) 930-948.

[259] W. Sieg and M. Ravaglia; David Hilbert and Paul Bernays; Grundlagen der Mathematik I and II, A Landmark, Technical Report N+.CMU-PHIL-154. February 24, 2004.

[260] W. Sierpi´nski; Cardinales and Ordinal numbers, Seconde Editión Revised, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1965.

[261] G. Šilov; On regular normed rings, Trav. Inst. Math. Stekloff, Vol.21, Moscow. 1947. (Russian).

[262] A. M. Sinclair; London Mathematical Society Lecture Notes Series. 21, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[263] T. Skolem; Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Wiss Vorträge, 5. Kongress Skand. Math., Helsingfors (1922) 217-232.

[264] R. R. Smith; On Non-unital Jordan-Banach algebras, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 82, (1977) 375-380.

[265] F. Smithies; Cauchy and the creation of complex funtion theory, Cambridge University Pres, New York. 1997.

[266] E. Snapper; The three crise in mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism, Mathematics Magazine, Vol. 52, Sept., (1979) 207-216.

[267] M. M. Solovay; Tesis doctoral, Universidad de Chicago, 1964.

[268] M. M. Solovay; A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Mathematics. Second Series 92, (1970) 1-56.

[269] L. L. Stachó; A projection principle concerning biholomorphic automorphisms, Acta Sci. Math. (Szeged), 44, no. 1-2, (1982) 99-124.

[270] S. W. P. Steen; Introduction to the theory of operators. V. Metric rings, Proc. Cambridge Philos. Soc., 36, (1940) 139-149.

[271] I. Stewart and D. Tall; Complex Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, 1983.

[272] C. H. Stolze; A history of the divergence theorem. (French summary) Historia Math., 5, no. 4, (1978) 437-442.

[273] M. H. Stone; Applications of the Theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41, (1937) 375-481.

[274] M. H. Stone; Boundedness properties in funtion-lattices, Canadian J. Math., 1, (1949) 176-186.

[275] E. Størmer; On the Jordan structure of C*-álgebras, Trans. Amer. Math. Soc., 120, (1965) 438-447.

[276] K. Stromberg; The Banach-Tarski Paradox, Amer. Math. Monthly, 86, (1979) 151-161.

[277] R. Taylor and A. Wiles; Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. Ann. of Math., (2), 141, (1995), no. 3, 553-572.

[278] J. Thomas; The Axiom of Choice, North-Holland. Amsterdam, 1973.

[279] J. Thomas; Set Theory. The third millennium edition revised and expanded. Springer. Berlin, Heidelber, 2002.

[280] Topping, David M. Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Amer. Math. Soc. No., 53, (1965) 48 pp.

[281] A. M. Turing; On computable numbers, with an application to the Entscheidungs problem,Proc. Lond. Math. Soc. (2) 42, (1936) 230-265.

[282] A. M. Turing; ¿Puede pensar una máquina?. Sigma, el mundo de las Matemáticas, Vol.Nº6 (1969) 36-60. Editorial Grijalvo. Barcelona, 1969.

[283] H. Upmeier; Symmetric Banach Manifolds and Jordan C*-algebras, (North Holland Math. Studies 104), North-Holland, Amsterdam, 1985.

[284] H. Upmeier; Some Aplications of Infinite-Dimensional Holomorphy to Mathematical Physics, (Dedicated to Leopoldo Naccbin on occasion of sixtieth birthd). Barroso Editor, Aspects of Mathematics and its Aplications. North-Holland Mathematical Library, Volume 34, 1986, Pag. 817-832. Elsevier Science Publishers B. V., 1986.

[285] H. Upmeier; Jordan algebras in Analysis, Operator Theory and Quantum Mechanics, (CBMS Regional Conference Series in Mathematics 67), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1987.

[286] B. L. van der Waerden; Modern Algebra, Vol. I, 1949 (Translated from the second revised German editon, by Fred Blum).

[287] Mª V. Velasco; Sobre el Teorema Principal de Wedderburn en Algebras de Banach Complejas Conmutativas, Memoria de Licenciatura, Dept. Análisis Matemático, Universidad de Granada, 1990.

[288] E. Vesentine; On the subharmonicity of the spectral radius, Boll. Un. Mat. Ital., 1,(4), (1968) 427-429.

[289] I. Vidav; Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren, Math. Z. 66, (1956) 121-128.

[290] J.P. Vigué; Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe, Ann. Sci. l'école Norm. Sup. (4), 9, (1976) 203-282.

[291] J.P. Vigué; Sur la convexité des domaines bornés cerclés homogènes; Seminaire Lelong-Skoda, Lecture Notes in Math. 822, pp. 317-331. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1980.

[292] A. Violant; El enigma de Fermat. Tres siglos de desafio a la matemática. RBA Colecciones. S.A., 2010.

[293] B. J. Vowden; On the Gelfand-Naimark Theorem, J. London Math. Soc., 42, (1967) 725-731.

[294] S. Wagon; The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1993.

[295] J. L. Walsh; History of the Riemann Mapping Theorem, Amer. Math. Monthly, Vol. 80, nº 3, (1973) 270-276.

[296] J. Warren; A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of Negative Quantities;Cambridge: J. Smith, Printer to the University. 1828.

[297] G. P. Wene; An example of a flexible, Jordan-admisible algebra of current use in hadron physics, Hadronic J., 1, (1978) 944-954.

[298] G. P. Wene; A Litte Color in Abstract Algebra, Amer. Math. Monthly, 89, (6), (1982) 417-419.

[299] H. Weyl; Gesammelte Abhandlungen. vol.IV. Ed. K. Chandrasekharan, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, New York, 1968.

[300] W. Wiener; Tauberian Theorem, Ann. Math., 33, (1932) 1-100.

[301] A. Wiles; Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math., no. 3, (2), 141, (1995) 443-551.

[302] A. Wiles; Modular forms, elliptic curves, and Fermat's last theorem. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 243-245, Birkhäuser, Basel, 1995.

[303] J.A. Wolf; Fine structure of hermitian symmetric spaces. Symmetric spaces:Short Courses, Washington Univ.(ed. by Boothby and Weiss), pp. 271-357, Marcel Dekker, New York, 1972.

[304] H. Woodin; Set theory and discotinuous homomorpfims from Banach algebras, Ph.D. Thesis, University of California at Berkeley, 1984.

[305] J. D. M. Wrigth; Jordan C*-álgebras, Michigan Math. J., 24, (1977) 291-302.

[306] J. D. M. Wrigth and M. A. Youngson; On isometries of Jordan algebras, J. London Math. Soc., 17, (1978) 339-344.

[307] K. Yosida; On the group embedded in the metrical complete ring, Japan. J. Math., 13, (1936) 459-472.

[308] M. A. Youngson; A Vidav Theorem for Banach Jordan algebras, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 84, (1978) 263-272.

[309] M. A. Youngson; Nonunital Banach Jordan algebras and C*-triple systems, Proc. Edinburgh Math. Soc., (2), 24, (1981) 19-29.

[310] M. A. Youngson; Hermitian operators on Banach Jordan algebras, Proc. Edinburgh Math. Soc., 22, (1979) 169-180.

[311] W. Zelazko, Banach algebras, Elsevier, Amsterdam, 1973.

[312] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov; Rings that are nearly associative, (translated from the Russian by F. Harry) 1982.

BIBLIOGRAFIA ADICIONAL

[313] Arquímedes-Wikipedia, la enciclopedia libre.

[314] N. Bourbaqui; Elementos de historia de las matemáticas. Alianza Universidad, 1976.

[315] R. B. Chuaqui, R. B. Aximatic Set Theory. Impredicative Theories of Classes. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxfoord, 1981.

[316] N. Cuesta Dutari; Análisis matemático de los números reales, El Basilisco nº10, mayo-octubre 1980.

[317] C. A. Di Prisco; Una Introducción a la Teoría de Conjuntos y los Fundamentos de las Matemáticas. IVIC., Venezuela, 1996. Notas de Clase.

[318] H. B. Enderton; Introduction to Set Theory, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1977.

[319] A. C. Fowler; Mathematical Models in the Applied Sciences, New York, 1997.

[320] M. de Guzmán Ozamiz; Matemáticas en el mundo moderno, Ed. Blume, Madrid-Barcelona, 1974. (Traducción de la edición americana: Mathematic in the modern world, W. H. Freeman and Company, Scientific American, Inc., San Francisco-London).

[321] K. Hrbáček and T. Jech; Introduction to Set Theoru. Marcel Dekker, New York-Basel, 1984.

[322] K. Kunen; Set Theory, an Introduction to independence proofs, North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokio, 1980.

[323] K. Kuratowski and A. Mostowski; Set Theory, with an introduction to descriptive set theory, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1976.

[324] J. D. Monk; Introduction to Set Theory, Mac Graw-Hill, New York, 1969.

[325] G. H. Moore; Zermelo's Axiom of Choice. Its origins, Development, and influence, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.

[326] H. Panofsky, K. Wolfgang and M. Philips; Classical Electricity and Magnetism, Edit Adisson-Wesley, 2ª Edición, Cambridge. Massachusetts, 1962.

[327] G. K. Pedersen; Analysis now, Springer-Verlag, New York, 1984.

[328] J. Van Heijenoort; From Frege to Gödel; A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967. (Traducción del inglés de [Zermelo 1904]). ISBN 0-674-32449-8.

[329] J. von Neuman; Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuantica; Traducción del alemán por el Dr. R. Ortiz, Publicaciones del Instituto de Matemáticas "Jorge´Juan", Madrid, 1949.

Discurso de contestación

7 DISCURSO DE CONTESTACIÓN

ANTONIO CAÑADA VILLAR

Académico Numerario de la Sección de Matemáticas

Excelentísimo Sr. Presidente, Excelentísimos e Ilustrísimos Señores Académicos, Queridos amigos y familiares del nuevo Académico Numerario, Señoras y Señores:

En primer lugar quiero expresar mi satisfacción y profundo agradecimiento a esta Academia, por el honor que me ha concedido, al permitirme contestar al discurso pronunciado por el Ilmo. Sr. D. Juan Cecilio Martínez Moreno, mi querido amigo Juan, con quien he compartido innumerables momentos de trabajo y amistad, trabajo que va disminuyendo con los años y amistad que va creciendo con los mismos.

En relación con el bello discurso que acabamos de oír, me gustaría comenzar recordando unas palabras de Miguel de Guzmán Ozámiz, Catedrático (ya fallecido) de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, y maestro de muchos de nosotros:

“Las matemáticas no tratan de verdades insondables ni infalibles. La matemática es una actividad del hombre, vieja como la música y la poesía, y que, como ellas, persigue una cierta armonía y belleza, ésas que puede proporcionar la estructura mental ágil, limpia y elegante de las construcciones matemáticas”

El discurso que acabamos de escuchar es, de hecho, un canto a la belleza de las matemáticas. No podía ser de otra manera, puesto que nuestro querido amigo Juan ha sido siempre un enamorado de las mismas. Con toda seguridad contribuyeron a ello varios factores, pero yo destacaría: la tranquilidad que se respiraba en Villanueva de Mesía en sus años de niñez, pues en Villanueva de Mesía, pueblo de la provincia de Granada, nació Juan hace no tantos años, y allí, bajo los álamos centenarios y el rumor de las acequias, Juan aprendió a pensar y a reflexionar sobre los hechos importantes de la vida. Resaltemos a continuación la figura de su primer y queridísimo maestro: su propio padre, de quien aprendió las primeras nociones de matemáticas con el rigor necesario para ello y también recibió una ayuda inestimable de su hermano mayor Ángel. Hay cosas que olvidas con el tiempo, pero afortunadamente, nunca olvidarás quién te las enseñó. Un apacible pueblo para pensar en las ideas matemáticas, un excepcional padre como primer maestro matemático y un buen hermano que le solucionó más de una duda: los ingredientes estaban servidos.

Las matemáticas se aprenden resolviendo problemas y esta actividad ocupó buena parte de la vida de Juan en sus años de

Bachillerato en el Instituto Padre Suárez de Granada, donde como él mismo reconoce en su discurso, tuvo que lidiar con aquellos que estaban propuestos en libros de texto muy duros y de gran nivel; gran acierto por parte de sus profesores, pues beber en fuentes adecuadas es clave para un aprendizaje correcto y el de las matemáticas no tiene secretos, si encuentras placer en su estudio y tienes como norma de vida el esfuerzo diario. Indudablemente, la inteligencia humana tiene limitaciones y pueden darse problemas matemáticos que sea incapaz de resolver, como ha ocurrido siempre y ocurre en la actualidad. Pero, el esfuerzo diario parece generar conexiones misteriosas en nuestra mente, mucho más poderosas que las de los ordenadores más modernos y Juan ha tenido desde muy joven esas cualidades: encontrar placer en el estudio y una capacidad de trabajo y esfuerzo admirables.

Juan se licenció en Matemáticas en la Universidad de Granada en 1973 y se doctoró, también en la Universidad de Granada, en 1976, con una tesis doctoral titulada “Sobre álgebras de Jordan normadas completas”. Fueron unos años clave para el desarrollo de las matemáticas en nuestra Universidad (y en España, en general). Se estaba comenzando a realizar investigación de calidad y docencia avanzada y era necesario montar toda la infraestructura concerniente a grupos y proyectos de investigación, creación de bibliotecas adecuadas, etc. Juan contribuyó de manera significativa a todo esto, creando, junto con sus compañeros de la sección de Matemáticas, un ambiente apropiado para la docencia y la creación científica. Uno de los placeres que aportan las matemáticas es aprender y compartir con otros, y Juan ya hacía esto desde sus años de licenciatura, donde tuvo excelentes amigos con quienes compartió muchas horas de trabajo matemático.

Juan tiene una trayectoria docente e investigadora muy amplia, de altísima calidad y es un ejemplo de dedicación a la Universidad, donde ha hecho de todo. Como docente ha desempeñado todas las figuras de profesor posibles (ayudante, encargado de curso, adjunto interino, adjunto contratado, titular de Universidad y Catedrático de Universidad desde 1992 hasta la actualidad). Ha impartido materias muy diversas de análisis matemático, aunque sus preferidas han sido, sin duda ninguna, las relacionadas con variable compleja. El título de su discurso es buena prueba de ello: "La Matemática como arte desde el prisma de los números complejos". Su actividad investigadora se enmarca en Análisis Funcional y Álgebra. Más precisamente, espacios de Banach y álgebras no necesariamente asociativas provistas de una norma. Ha participado en numerosos proyectos de investigación y ha sido investigador principal en varios de ellos. Tiene numerosas publicaciones en revistas de gran nivel y ha actuado como referee de muchas de ellas, como Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Quarterly Journal of Mathematics, Journal of Algebra, Communications in Algebra, Mathematische Zeitschrift, Journal of the London Mathematical Society, Journal of Mathematical Analysis and Applications, etc. Quiero resaltar que muchas de las aportaciones de sus trabajos han sido recogidas en diversas monografías muy prestigiosas. Ha participado como conferenciante en muchos congresos de alto nivel internacional, destacando los celebrados en Tubinga, Oberwolfach y Blaubeuren (Alemania), Montpellier (Francia) y Sao Paulo (Brasil). Ha sido director de tres tesinas y tres tesis doctorales e impartido conferencias en diferentes universidades nacionales y extranjeras. Tiene el máximo número posible de sexenios de investigación y de quinquenios docentes, además de haber organizado diversos congresos de su especialidad. También ha prestado numerosos servicios institucionales que serían difíciles de enumerar. En resumen, un universitario, profesor e investigador ejemplar que ha contribuido a que la Universidad sea cada vez mejor.

Conocí a Juan en 1976, como profesor mío, cuando yo estudiaba tercer curso de la licenciatura en Matemáticas. Fue una suerte tenerle como profesor de cálculo numérico. Yo he tenido siempre una cierta prevención por el llamado cálculo numérico, pero Juan lo enfocó desde el punto de vista del análisis matemático, impartiendo en realidad análisis numérico, y eso ya tenía otra pinta, puesto que no se trataba de contar de uno en uno, sino introduciendo las herramientas típicas del análisis matemático, parándose siempre que hiciera falta en algún que otro número irracional. La esencia de las matemáticas no consiste en complicar lo que es simple, sino en simplificar lo que es complicado y esto lo consiguió Juan.

¡Qué tiempos aquellos! Éramos jóvenes y con mucha ilusión y recuerdo que ya tuvimos algunas de nuestras discusiones típicas en torno a definiciones, teoremas, demostraciones, hipótesis, etc., es decir en torno a cómo se hacen matemáticas, discusiones de amigo que continuamos en la actualidad, aunque cada vez con menos vigor, pues ambos hemos comprendido con el tiempo que, exagerando un poco, los números (racionales, irracionales, complejos, etc.) son en realidad un invento de la mente humana, un invento diabólico, aunque haya muchos que se empeñen (entre los que me encuentro) en defender su utilidad. Dicen (decimos) que con los números se puede demostrar cualquier cosa y siempre encontramos sitio y lugar para seguir hablando de matemáticas, nuestra pasión común, pero cada vez más hablamos de un buen vino, una buena música o una bonita excursión por la Naturaleza.

Juan ha tenido siempre una formación teórica profunda y hablando un poco más en serio (o un poco más en broma, depende de la hipótesis que admitamos), los matemáticos intentamos entender el problema que nos ocupa en su integridad, sin importarnos las posibles aplicaciones, pero, sorprendentemente, el intento humano por entender los fenómenos de la Naturaleza, se ve enormemente facilitado cuando se usan las matemáticas. Buena prueba de ello es que los griegos, basándose únicamente en “razonamientos de matemática pura” dedujeron las propiedades de las cónicas, mucho antes de que se comprobase que tales curvas representan las órbitas de los planetas y otros cuerpos celestes. Por si fuera poco, Galileo Galilei dijo

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo, frase que se ve reforzada por la reflexión de Leonardo da Vinci, sobre la necesidad de contenidos teóricos:

Aquellos que se enamoran solo de la práctica, sin cuidar de la exactitud o de la ciencia, son como el piloto que se embarca sin tomín ni aguja, y nunca sabrá dónde va a parar.

El excelente discurso que acabamos de escuchar lleva por título "La Matemática como arte desde el prisma de los números complejos". La Real Academia Española, define la palabra "arte" como *"Manifestación de la actividad humana mediante la cual se expresa una visión personal y desinteresada que interpreta lo real o imaginado con recursos plásticos, lingüísticos o sonoros"*, y la palabra "matemática" como *"ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones"*. Hagamos hincapié en que para la Real Academia Española, la matemática es una ciencia. Para la mayoría de las personas, ciencia y arte son diametralmente opuestos, puesto que la ciencia trata de entender y explicar la realidad, mientras que el arte parece sólo existir en la mente humana. Pero, ¿es que las ideas matemáticas existen en alguna otra parte que no sea la mente humana?

Nuestro querido amigo Juan se ha empeñado en demostrarnos que la matemática es bella, y tengo que reconocer que lo ha conseguido, a pesar de que tuve que leer por primera vez el discurso en el mes de Agosto pasado. En relación con esto, en la segunda parte de "El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha", se dice

"En lo que faltaba de camino les fue contando el licenciado las excelencias de la espada, con tantas razones demostrativas y con tantas figuras y demostraciones matemáticas, que todos quedaron enterados de la bondad de la ciencia".

Pues bien, Juan da tantas razones para convencernos de que la matemática es bella que lo ha conseguido plenamente. El discurso está lleno de citas y reflexiones, y leyéndolo, se llega a la conclusión de que las matemáticas constituyen una actividad que usa reglas similares a las sinfonías de Beethoven, las pinturas de Da Vinci o las poesías de Homero. Como dijo Poincaré: *"La ciencia no es una colección de resultados, afirmaciones y teoremas, de la misma forma que una casa no es una colección de ladrillos"*.

En el discurso se hace un recorrido amplio y bien documentado sobre una historia compleja, la de los números complejos. Comienza con algunos elementos de la fundamentación de las matemáticas, donde Juan expone con maestría y claridad cuestiones espinosas, como el quinto postulado de Euclides, resolución de ecuaciones polinómicas por radicales, el último teorema de Fermat, teoría de conjuntos y paradojas. Trata a continuación de los números complejos, y por si éstos no fuesen ya suficientemente complejos, también habla de los cuaternios, aunque en esta parte se toma un bien merecido descanso disertando ampliamente sobre la que quizás sea la fórmula más hermosa de toda la matemática: la llamada fórmula de Euler. La belleza no es algo objetivo; depende de los sentimientos y emociones que provoca, pero en la fórmula de Euler están presentes, además de los símbolos de la suma e igualdad, dos números naturales aparentemente inofensivos (el cero y el uno), dos números irracionales diabólicos, puesto que son irracionales trascendentes (el número e y el número π) y un número complejo (el número i). Alguien dijo alguna vez que los fenómenos de la Naturaleza se modelan mediante inecuaciones y que las ecuaciones son un accidente. Pues bien, esta fórmula de Euler es un accidente agradable y bello.

En este punto, me viene a la cabeza la conversación sobre "el libre albedrío", entre el sacerdote y el guardia civil, en la película "Amanece que no es poco", dirigida por José Luis Cuerda en 1988: "hombre, le dice el sacerdote al guardia civil, es que el libre albedrío es un tema muy bonito; podríamos estar hablando de ello horas y horas". Cambien al sacerdote y al guardia civil por dos matemáticos, tomando café entre clase y clase y cambien la frase "libre albedrío" por "fórmula de Euler" y descubrirán una entretenida conversación entre esos dos matemáticos, que dura horas y horas.

Sigue Juan con una sección sobre "funciones complejas de variable compleja", donde se recrea, entre otras cosas, con el teorema fundamental del álgebra y la fórmula integral de Cauchy, exponiendo cómo surgen de manera natural los conceptos fundamentales de la variable compleja. En su erudito discurso, Juan llega hasta la investigación actual con el tema de las C^*-álgebras y el teorema no asociativo de Vidav-Palmer, concluyendo con los JB*-triples, en los que es mejor no detenerse demasiado, por lo que pueda pasarle a los asistentes a este acto. En resumen, un discurso brillante, completo, muy bien documentado, lleno de frases acertadas y donde hay constantes reflexiones no sólo sobre las matemáticas, sino también, y esto indica mucho de la personalidad de Juan, sobre la vida, la amistad y el agradecimiento a sus maestros.

Quiero acabar (a pesar de que imagino que, mi gran amigo y gran amigo de Juan, el Sr. Presidente, me dirá con seguridad que la contestación ha sido breve), expresando nuestra gran satisfacción por la incorporación a la Academia de Ciencias de Granada del profesor Juan Cecilio Martínez Moreno, felicitándolo a él y a su familia, y deseándole una estancia feliz en esta noble e insigne institución.

Querido profesor, compañero y amigo, bienvenido a la Academia.

Muchas gracias.

Índice general